

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE TENSÕES EM CASCAS SEMI ESPESSAS DE
REVOLUÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ALTAMIR DIAS,

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1981

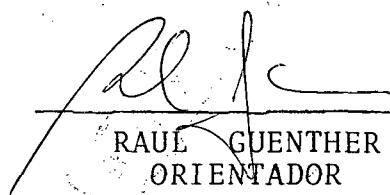
ANÁLISE DE TENSÕES EM CASCAS SEMI-ESPESSAS DE REVOLUÇÃO
ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

ALTAMIR DIAS


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

" MESTRE EM ENGENHARIA "

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

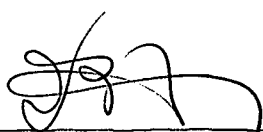


RAÚL GUENTHER
ORIENTADOR



ARNO BLASS
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA



DOMINGOS BOECHAT ALVES
PRESIDENTE



CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS



RAÚL GUENTHER

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Raul Guenther, pela orientação.
- Aos professores da Área de Projeto, pelas sugestões.
- Aos companheiros do Curso de Pós-Graduação pelo incentivo e apoio ao longo do trabalho.
- A todos aqueles que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi realizado com a ajuda financeira da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), sem a qual seria muito difícil a realização desta pesquisa.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	
1.1. Generalidades	01
1.2. Revisão Bibliográfica	02
1.3. Análise de Tensões em Cascas Semi-espessas de Revolução	05
2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA	
2.1. Introdução	08
2.2. Hipóteses Básicas	09
2.3. Teoria Geral para Cascas de Revolução	11
2.3.1. Relações deformações-deslocamentos	11
2.3.2. Relações tensões-deformações	13
2.3.3. Tensões e momentos resultantes	15
2.3.4. Relações tensões resultantes-deformações	16
2.3.5. Equações de equilíbrio	20
2.4. Teoria para Cascas Semi-espessas de Revolução	24
2.4.1. Relações deformações-deslocamentos	24
2.4.2. Relações tensão-deformações	26
2.4.3. Tensões e momentos resultantes	26
2.4.4. Relações tensões resultantes-deformações	27
2.4.5. Equações de equilíbrio	28
2.5. Equações de Equilíbrio Adimensionalizadas em Termos dos Deslocamentos para Teoria de Cascas Semi-Espessas de Revolução	29
2.5.1. Adimensionalização e expansão das variáveis na direção circunferencial em série de Fourier	29
2.5.2. Adimensionalização e expansão das tensões e momentos resultantes	32
2.5.3. Equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos	34
2.5.4. Condições de contorno	35
3. RESULTADOS E CONCLUSÕES	38
3.1. Introdução	38
3.2. Casca Cilíndrica de Espessura Constante. Bi-Engastada	39

3.2.1. Sujeita a uma pressão interna uniformemente distribuida $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$, $n=0$	40
3.2.2. Sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada θ , $n=1$	48
3.3. Casca Cilíndrica de Espessura Constante Engastada e sob Efeito de Temperatura	51
3.3.1. Com temperatura distribuida uniformemente ao longo da coordenada circunferencial θ , $n=0$	52
3.3.2. Com distribuição cossenoidal de temperatura ao longo da coordenada circunferencial θ , $n=1$	58
3.4. Casca Cônica, Engastada-Livre	58
3.4.1. Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ uniformemente distribuida na direção circunferencial, $n=0$.	61
3.4.1.a. Casca cônica $\alpha = 45^\circ$	61
3.4.1.b. Casca cônica $\alpha = 30^\circ$	66
3.4.1.c. Casca cônica $\alpha = 15^\circ$	68
3.4.2. Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n=1$.	70
3.4.2.a. Casca cônica $\alpha = 45^\circ$	72
3.4.2.b. Casca cônica $\alpha = 30^\circ$	76
3.4.2.c. Casca cônica $\alpha = 15^\circ$	78
3.5. Casca Cilíndrica, Engastada-Livre	80
3.5.1. Sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ uniformemente distribuida ao longo da coordenada circunferencial, $n=0$	80
3.5.2. Sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n=1$	83
3.6. Casca Semi-Esférica, Engastada no Equador e com Abertura no Polo	87
3.6.1. Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ uniformemente distribuida ao longo da coordenada circunferencial, $n=0$	89
3.6.2. Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n=1$	92

3.7. Conclusões Finais	95
BIBLIOGRAFIA	99
APÊNDICES	101
A. Sistemas de Coordenadas	102
B. Teoria Geral de Cascas	104
B.1. Relações deformação-deslocamentos	104
C. Teoria para Cascas de Revolução Semi-Espessas	109
C.1. Relações deformação-deslocamentos	109
D. Coeficientes das Equações de Equilíbrio	112
E. Elementos das Matrizes da Equação de Contorno	119
F. Programa CORTER-2	122

RESUMO

Muitos são os trabalhos desenvolvidos para solucionar problemas de cascas baseadas nas hipóteses de Kirchhoff-Love, os quais desprezam as deformações cisalhantes transversais, tensão normal transversal e a relação entre a espessura e o menor raio de curvatura principal da casca (h/R).

Este trabalho apresenta uma formulação analítico-numérica, a qual determina os deslocamentos e tensões resultantes, em cascas baseada numa teoria denominada de cascas semi-espessas em que as deformações cisalhantes transversais não são consideradas desprezíveis em relação as demais e a relação h/R não é desprezada em relação a unidade.

São apresentados a análise de alguns problemas os quais foram resolvidos a partir de um programa digital em FORTRAN IV, cuja formulação numérica é feita através de diferenças finitas e as soluções obtidas a partir do esquema de Cholesky.

ABSTRACT

Several research works have been developed to solve shell problems based on the Kirchhoff-Love hypotheses, which neglect the transverse shear strains and stresses, as well, the relation h/R , between the shell thickness and the radius of curvature, when compared with unity.

This work presents an analitic-numerical formulation for the determination of the displacements, resultant stresses and strains using the theory of moderately thick shells in which the transverse shear strains and the relation h/R are taken into account.

Some problems were solved using a computer programme developed in which, the numerical formulation is carried out by the finite differences and the solution obtained by the Cholesky technique.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Generalidades

Considera-se uma casca um corpo sólido limitado por duas superfícies não intersecantes. Em cascas de revolução esas superfícies são geradas à partir da rotação de curvas planas em torno de um eixo contido no plano das curvas, denominado eixo de revolução.

As cascas apresentam três características fundamentais: a superfície de referência, espessura e os contornos. Destas, a mais importante é a superfície de referência, por definir a forma da casca. Além disso, uma casca pode ser imaginada como a materialização da superfície de referência, e desta forma pode-se estudar o comportamento da casca a partir da mesma, conforme Guenther [3].

A superfície de referência é tomada entre as superfícies que limitam a casca. É comum utilizar como superfície de referência a superfície média da casca.

A espessura é definida como a distância entre as superfícies que limitam a casca, medida ao longo da normal à superfície de referência.

Em cascas de revolução, os contornos tem sempre a forma de coroa circular.

As teorias de cascas são aplicadas na análise de tensões em reservatórios, vasos de contenção, estruturas para veículos espaciais e equipamentos de usinas nucleares, submetidos a distribuições de temperaturas e/ou carregamentos estáticos e dinâmicos das mais diversas formas.

No caso de carregamentos estáticos, objeto deste trabalho, existem várias teorias que são utilizadas na análise de comportamento de cascas, e as principais estão citadas na referência bibliográfica.

1.2. Revisão Bibliográfica

Uma análise histórica do desenvolvimento das teorias de cascas é apresentado em Naghdi [14], parte da qual é reproduzida:

"A primeira tentativa para formular uma teoria de cascas finas a partir das equações da elasticidade foi feita por Love em 1874, e conseguida em 1888, através da conhecida primeira aproximação de Love. Desde seu início, a formulação da teoria linear de cascas tem sido repetidamente reexaminada e tem sido objeto de muita controvérsia. Apesar de recentes progressos, muitos trabalhos neste campo tem apresentado um contínuo exame do estado da teoria geral de cascas, a qual ainda carece de rigor matemático, como o utilizado nas teorias especiais de elasticidade, tal como a teoria de tensões em placas.

As equações diferenciais da teoria na forma dada por Love não foram responsáveis pelo tratamento analítico. Em 1912, Reissner através de uma criteriosa escolha das variáveis dependentes, expressou a deformação de uma casca esférica submetida a um carregamento axissimétrico em termos de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e indicou suas soluções por meios de séries envolvendo funções exponenciais. No ano seguinte, Meissner notou que as equações de Reissner eram do tipo hipergeométrico e poderiam ser generalizadas para todas as cascas de revolução geradas por curvas de raios de curvaturas constantes. Em subsequente extensão, Meissner mostrou que uma redução similar da equação diferencial de quarta ordem para duas equações diferenciais de segunda ordem era possível para cascas de revolução com espessura da casca variando segundo as "condições de Meissner's". Reissner observa que a solução não homogênea da equação diferencial pode ser aproximada por uma solução de membrana e sugere a possibilidade de uma solução assintótica para a equação, em potências da razão entre a espessura da casca e de uma dimensão representativa da casca. A integração da equação diferencial de Reissner - Meissner, para uma casca de revolução, pelo método clássico da integração assintótica é feita por Hildebrand (1950). Tais soluções, embora convenientes em muitos casos, não são válidas quando a região de interesse in-

clui um ponto em que ocorre singularidade na equação diferencial.

A derivação da deformação de cascas axissimétricas de revolução com pequenos deslocamentos e os resultados da equação diferencial foi reconsiderado em 1949 por Reissner, a qual embora diferisse ligeiramente das equações de Reissner - Meissner, oferece certas vantagens não reveladas nas primeiras formulações. Subsequentemente, as equações diferenciais na forma dada por Reissner, foram combinadas com a equação diferencial que é válida para as "condições de Meissner's". Nesta forma, as equações diferenciais são reescritas a fim de que pudessem ser tratadas pelo método da integração assintótica desenvolvida por Langer, a qual fornece soluções válidas nas singularidades das equações.

A inclusão do efeito das deformações cisalhantes transversais nas teorias para cascas de revolução axissimétrica conduzem a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias acopladas, as quais são consideradas mais complexas que as equações de Reissner - Meissner. Este trabalho foi desenvolvido por Naghdi, o qual também apresenta sua solução.

Uma derivação geral e consistente da primeira aproximação de Love está contido num tratado desenvolvido por Green e Zerna. Uma exposição geral sobre o assunto, também foi feita por Hildebrand, F.B., Reissner, E., and Thomas, G.B., onde adicionado à primeira aproximação de Love é incluído um resumo da teoria da segunda aproximação de Love".

A complementação histórica deste texto é dado por Krauss [1], onde além de apresentar o desenvolvimento de todos os progressos ocorridos nas teorias de cascas, apresenta as soluções analíticas descritas no texto acima. Krauss [1] em seu livro apresenta nos primeiros capítulos, a teoria de cascas finas, baseadas nas hipóteses de Kirchhoff-Love e as modificações que esta teoria sofreu através das contribuições de Sander's, Flügge-Lur'e - Byrne. Desenvolve também a teoria que apresenta os efeitos da incorporação da deformação normal transversal e tensão normal transversal.

Nos capítulos subsequentes apresenta a solução analítica para diversos problemas de cascas, em que a forma da casca e os carregamentos são simples. Apresenta, inicialmente, a análise de membrana em cascas de revolução, e posteriormente introduz formas de carregamentos menos simples, mas que permitam que a solução da casca seja obtida analiticamente. Para concluir, os estudos de soluções analíticas apresenta as soluções analíticas aproximadas como as desenvolvidas por Geckeler e as obtidas através da integração assintótica. Nos capítulos finais apresenta uma série de métodos para análise numérica de cascas submetidas a cargas estáticas e dinâmicas. Dentre estes métodos apresenta os métodos de diferença finita, elementos finitos e integração passo a passo. Também são mostradas a solução numérica de diversos problemas, que são comparados às soluções analíticas.

Das [2] apresenta a análise de momentos em cascas semi-espessas de revolução utilizando a inclusão das deformações cisalhantes transversais, como desenvolvido por Naghdi [9] e Reissner [10], usando o princípio variacional de Reissner para obter as relações deformações-deslocamentos e as equações de equilíbrio. Em seu trabalho apresenta as equações básicas do problema, onde estão incluídas as constantes geométricas, as equações de equilíbrio, relações tensões e momentos resultantes-deslocamentos, condições de contorno e condições de descontinuidades em cascas. Na parte final apresenta a análise numérica do trabalho baseado no método de diferenças finitas. A solução das equações de diferenças finitas foi feita identicamente ao trabalho de Budiansky e Radkowski [6].

No Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina vários trabalhos foram desenvolvidos, a fim de apresentar a análise numérica de problemas baseados nas formulações analíticas comumente conhecidas. Os trabalhos nesta área iniciaram com Alves [15], o qual desenvolve uma formulação numérica para o cálculo de tensões resultantes, deslocamentos e deformações em cascas delgadas de revolução. Como sequência, o mesmo em [16] apresenta um método de análise para soluções de cascas ortotrópicas de revolução reforçadas por anéis de seção abertas. Em [3,17,18], Guenther, dando continuidade ao trabalho de

Alves, apresenta uma formulação analítico-numérica para analisar tensões térmicas em cascas finas de revolução. O presente trabalho complementa os trabalhos desenvolvidos neste Centro Tecnológico, apresentando o desenvolvimento de uma formulação analítica para a análise de cascas semi-espessas, através da inclusão das deformações cisalhantes transversais.

Paralelamente, vários trabalhos tem sido desenvolvidos, utilizando o método de elementos finitos para análise de cascas [19,20].

1.3. Análise de Tensões em Cascalas Semi-Espessas de Revolução

Os trabalhos desenvolvidos para analisar cascas de revolução normalmente utilizam a teoria de cascas finas. Esta teoria despreza a influência da tensão e deformação normal transversal, das deformações cisalhantes transversais e a relação entre a espessura e o menor raio de curvatura da casca (h/R).

Este trabalho tem intuito de verificar a influência das deformações cisalhantes transversais e da relação h/R , sobre o comportamento das tensões resultantes, dos deslocamentos e deformações e compará-lo aos resultados obtidos pela teoria de cascas finas.

São desenvolvidas equações para a "teoria geral de cascas" a partir das hipóteses assumidas por Krauss [1] e posteriormente utilizando as hipóteses assumidas por Das [2], desenvolve-se o modelo analítico aplicável a análise de cascas "semi espessas". Com este modelo analítico, utilizando-se da formulação numérica proposta por Guenther [3], obteve-se um programa digital CORTER-2, que analisa problemas para cascas "semi-espessas".

Na parte inicial do trabalho desenvolve-se a "teoria geral de cascas" proposta em [1], o qual considera a inclusão da tensão e deformação normal transversal e deformações cisalhantes transversais. Assume-se que os deslocamentos segundo

as coordenadas da superfície de referência variem linearmente com a distância do ponto à superfície de referência e que o deslocamento segundo a normal à superfície de referência pode ser expandido numa série de Taylor até o 3º termo da série, onde o 2º e 3º termo da série aparecem devido a inclusão dos efeitos da deformação normal transversal. Substituindo estes deslocamentos nas relações deformações-deslocamentos obtidos na teoria linear da elasticidade [5] e utilizando as relações tensões deformações para um material com ortotropia especial (onde o material possui as mesmas propriedades nas direções segundo as linhas de coordenadas principais da superfície de referência e diferentes na direção normal à mesma) determina-se através das definições usuais das tensões e momentos resultantes, suas expressões em função dos deslocamentos. Calculando a energia potencial total e aplicando o princípio variacional da energia potencial mínima, determinam-se as equações de equilíbrio e as condições de contorno naturais e geométricas para a "teoria geral de cascas".

A partir daí, desenvolve-se a teoria para analisar problemas de cascas "semi-espessas", assumindo as hipóteses propostas em [2], para uma casca de revolução.

Desprezando-se os efeitos devido a inclusão da deformação normal transversal, desaparecem o 2º e o 3º termo da série de Taylor na expressão do deslocamento transversal, que com isso é simplificada. Desta forma, simplificam-se, também, as relações deformações-deslocamentos, as tensões e momentos resultantes e, como consequência, as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno naturais e geométricas.

As equações diferenciais de equilíbrio são equações diferenciais parciais. Para obter sua solução todas as variáveis são expandidas em série de Fourier na direção circunferencial. Com isto as equações diferenciais parciais de equilíbrio são transformadas num sistema de equações diferenciais ordinárias em relação à coordenada s para cada harmônico da série de Fourier. Adimensionalizando e expandindo as expressões das tensões e momentos resultantes em série de Fourier na direção circunferencial e substituindo-as na equação diferencial de equilí

brío, obtêm-se um sistema de equações diferenciais ordinárias de equilíbrio em termos de deslocamentos, que serão utilizadas para se determinar o campo de deslocamento.

No capítulo dois é apresentado os desenvolvimentos das equações de teoria geral de cascas e da teoria para cascas semi-espessas.

No terceiro capítulo apresentam-se os resultados e conclusões obtidas através da análise e soluções de alguns problemas e geometrias de cascas. Os resultados obtidos pela teoria de cascas semi-espessas são comparados àqueles obtidos através da teoria de cascas finas, desenvolvidas por [3], baseados na hipótese de Kirchhoff-Love.

2. Formulação Analítica

2.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento de uma teoria e um modelo matemático para a análise de cascas semi-espessas de revolução.

São obtidas as relações deformações-deslocamentos, as expressões das tensões e momentos resultantes, as equações de equilíbrio para um elemento de casca e as condições de contorno.

As relações deformações-deslocamentos são estabelecidas a partir das relações genéricas para um elemento de casca de revolução proposto na referência [5].

As expressões das tensões e momentos resultantes são determinados através das definições usuais [1,4,9,10], enquanto que as equações de equilíbrio e as condições de contorno são obtidas a partir da aplicação do princípio da energia potencial mínima para um elemento genérico de casca (figura 1).

Todas as equações são adimensionalizadas tomando como constantes adimensionalizadoras: a (comprimento), h_0 (espessura), E_0 (módulo de elasticidade longitudinal), σ_0 (tensão) e T_0 (temperatura) de referência, sendo então, expandidas em série de Fourier de maneira compatível [2,3].

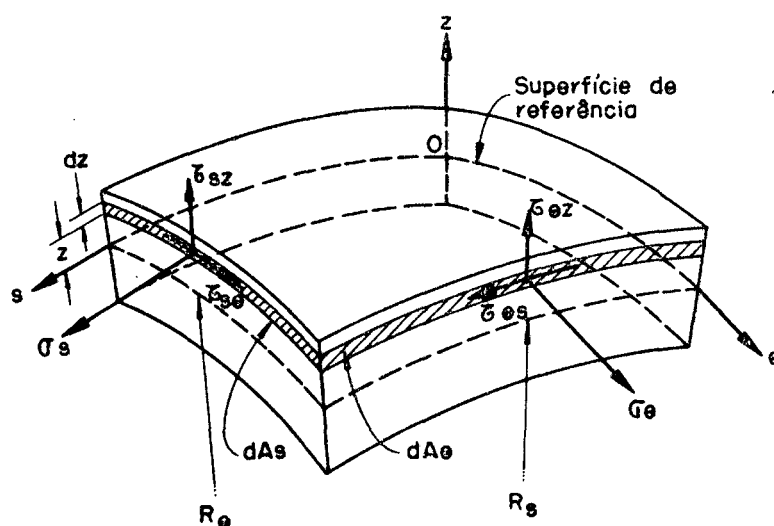


Figura 1 - Elemento genérico de casca.

Finalmente, obtêm-se as equações de equilíbrio e as condições de contorno em termos dos deslocamentos e a formulação analítica está pronta para ser submetida a um método numérico para sua verificação.

2.2. Hipóteses Básicas

As teorias de cascas são, normalmente, desenvolvidas para cascas finas, baseadas nas hipóteses de Kirchhoff-Love, que são as seguintes:

- a.1) A casca é fina;
- a.2) Os deslocamentos que ocorrem são pequenos;
- a.3) A tensão normal à superfície de referência (σ_z) é desprezível;
- a.4) Segmentos retilíneos normais à superfície de referência antes da deformação permanecem retilíneos e normais à superfície de referência deformada, não mudando de comprimento durante a deformação.

Na "teoria geral de cascas" baseada no desenvolvimento proposto em [1], assume-se as seguintes hipóteses:

- b.1) A relação entre a espessura da casca e o menor raio de curvatura principal (h/R) não é desprezível;
- b.2) Os deslocamentos que ocorrem são pequenos;
- b.3) Os efeitos provocados pela tensão normal transversal (σ_z) são considerados;
- b.4) Os efeitos devido a presença das deformações normal transversal (ϵ_z) e cisalhantes transversais (ϵ_{sz} e $\epsilon_{\theta z}$) são levados em conta.

Comparando-se as duas teorias, observa-se que:

- 1 - Enquanto na teoria de cascas finas a relação h/R é desprezada (hipótese a.1), na teoria geral de cascas ela é considerada (hipótese b.1). Esta relação aparece nas expressões dos comprimentos de linhas de coordenadas da casca, através dos coeficientes de Lamé [1,3,4], que para o sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal, são dados por [3,4]:

$$\alpha = A \left(1 + \frac{z}{R_s} \right)$$

$$\beta = B \left(1 + \frac{z}{R_\theta} \right) \quad (2.1)$$

$$\gamma = 1$$

Na teoria de cascas finas considera-se que a relação $\frac{h}{R_i} \ll 1$ ($i = s, \theta$), podendo ser desprezadas nas equações 2.1. Já na teoria geral de cascas a relação $\frac{h}{R_i}$ é levada em conta, por ser considerada não desprezível comparada com a unidade.

2 - Através da hipótese a.4 assume-se que ϵ_{sz} , $\epsilon_{\theta z}$ e ϵ_z são nulas e, pela hipótese a.3 σ_z é considerado desprezível. Portanto b.3 e b.4 contrariam a hipótese a.3 e a.4. A inclusão das deformações cisalhantes transversais faz com que os segmentos retilíneos normais à superfície de referência, antes da deformação, não permaneçam necessariamente retilíneos nem normais à mesma após a deformação e, a inclusão da deformação normal transversal implica em que o comprimento da normal à superfície de referência varie com a deformação da casca. Verifica-se, assim, que a "teoria geral de cascas", através das hipóteses b.3 e b.4, torna o modelo analítico mais flexível que os modelos desenvolvidos a partir da teoria de cascas finas. Este fato, permite afirmar que o modelo analítico desenvolvido através da "teoria geral de cascas" possibilita mudanças de forma maiores na superfície de referência que o modelo analítico de cascas finas. Cabe ressaltar que, pela hipótese b.2 considera-se que os deslocamentos são pequenos, o que determina que a configuração da superfície de referência após a deformação seja, aproximadamente, igual àquela antes da deformação, permitindo que as equações desenvolvidas através da "teoria geral de cascas" possam ser referenciadas à superfície de referência indeformada.

A teoria utilizada neste trabalho para analisar cascas semi-espessas é baseada nas hipóteses adotadas em [2], que são as seguintes:

c.1) A relação entre a espessura da casca e o menor raio de curvatura principal h/R é levado em conta;

- c.2) Os deslocamentos que ocorrem são pequenos;
- c.3) A tensão normal transversal (σ_z) é considerada desprezível quando comparada a outras tensões;
- c.4) Desprezam-se os efeitos provocados pela deformação normal transversal (ϵ_z), considerando-se, no entanto, aqueles gerados pela presença das deformações cisalhantes transversais (ϵ_{sz} e $\epsilon_{\theta z}$).

Ao desprezar o efeito da tensão normal transversal (σ_z) desaparecem as tensões e momentos resultantes de ordem superior que ocorre na "teoria geral de cascas" produzidas pela inclusão de σ_z .

Desprezando a deformação normal transversal (ϵ_z) os segmentos retilíneos e normais à superfície de referência antes da deformação não mudam de comprimento, mas por ser considerado os efeitos da presença das deformações cisalhantes transversais ϵ_{sz} e $\epsilon_{\theta z}$ estes segmentos deixam de ser retilíneos e normais a superfície de referência após a deformação.

Com isto se introduz no modelo analítico para cascas semi-espessas a mesma inconsistência da teoria de cascas finas, onde ocorre a coexistência no modelo analítico do "estado plano de tensões" ($\sigma_z = 0$) e do "estado plano de deformações" ($\epsilon_z = 0$).

O modelo analítico desenvolvido a partir da teoria de cascas semi-espessas apresenta uma flexibilidade intermediária entre os modelos da "teoria geral de cascas" (mais flexível) e da teoria de cascas finas (mais rígido).

2.3. Teoria Geral para Cascas de Revolução

2.3.1. Relações deformações-deslocamentos

Nesta teoria considera-se que as componentes U e V do deslocamento variam linearmente com a distância do ponto à superfície de referência e que o deslocamento transversal W possa ser representado pelos primeiros termos da respectiva série de Taylor.

$$\begin{aligned}
 U(s, \theta, z) &= u(s, \theta) + z \beta_s(s, \theta) \\
 V(s, \theta, z) &= v(s, \theta) + z \beta_\theta(s, \theta) \\
 W(s, \theta, z) &= w(s, \theta) + z w'(s, \theta) + \frac{1}{2} z^2 w''(s, \theta)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

onde β_s e β_θ são as rotações da normal à superfície de referência

em relação as linhas de coordenadas s e θ respectivamente, w' e w'' representam a contribuição devido a inclusão do efeito da tensão normal transversal, visto que nesta teoria a normal não permanece normal à superfície de referência após a deformação. O termo quadrático usado na expressão de W pode ser utilizado nas expressões de U e V , mas isso leva a valores desprezíveis nas expressões posteriores [1].

No apêndice B são desenvolvidas relações deformações-deslocamentos para casca cujas linhas de coordenadas são as linhas de curvatura principais, levando em conta as premissas utilizadas na "teoria geral de cascas", a partir das relações deformações-deslocamentos desenvolvidas pela teoria da elasticidade, nas quais são levadas em conta apenas os termos lineares.

Assim sendo, as relações deformações-deslocamentos para um sistema de coordenadas (s, θ, z) resultam a partir de B 1.5 (Apêndice B) em:

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_s})} \{ \epsilon_s^0 + z \epsilon_s' + \frac{1}{2} z^2 \epsilon_s'' \} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_\theta})} \{ \epsilon_\theta^0 + z \epsilon_\theta' + \frac{1}{2} z^2 \epsilon_\theta'' \} \\ \epsilon_z &= w' + z w'' \\ \epsilon_{s\theta} &= \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_s})} \{ \gamma_s^0 + z \gamma_s' \} + \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_\theta})} \{ \gamma_\theta^0 + z \gamma_\theta' \} \\ \epsilon_{sz} &= \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_s})} \{ \mu_s^0 + z \mu_s' + \frac{1}{2} z^2 \mu_s'' \} \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_\theta})} \{ \mu_\theta^0 + z \mu_\theta' + \frac{1}{2} z^2 \mu_\theta'' \}\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde os termos de 2.3 estão indicados no Apêndice B e os elementos $\epsilon_s^0, \epsilon_\theta^0, w^0, \gamma_s^0, \gamma_\theta^0, \mu_s^0, \mu_\theta^0$ representam a deformação na superfície de referência. Neste caso as rotações β_s e β_θ não podem ser representados simplesmente como nas teorias de cascas finas [1,3], pois as deformações cisalhantes transversais não desaparecem.

2.3.2. Relações tensões-deformações

Um material homogêneo, elástico e ortotrópico é definido pela lei de Hooke, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{s\theta} \\ \epsilon_{sz} \\ \epsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_s} & -\frac{\nu_{s\theta}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{sz}}{E_z} & & & \\ -\frac{\nu_{\theta s}}{E_s} & \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_z} & & & \\ -\frac{\nu_{zs}}{E_s} & -\frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta} & \frac{1}{E_z} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{s\theta}} & & \\ & & & & \frac{1}{G_{sz}} & \\ & & & & & \frac{1}{G_{\theta z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{s\theta} \\ \tau_{sz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{ts} \\ \alpha_{t\theta} \\ \alpha_{tz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} T \quad (2.4)$$

onde $\epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ e $\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_z$ são deformações e tensões normais, $\epsilon_{s\theta}, \epsilon_{sz}, \epsilon_{\theta z}$ e $\tau_{s\theta}, \tau_{sz}, \tau_{\theta z}$ são deformações e tensões cisalhantes, $\alpha_{ts}, \alpha_{t\theta}, \alpha_{tz}$ são os coeficientes de dilatação linear e T é a temperatura no ponto (s, θ, z) , medida em relação a temperatura do estado livre de tensões.

Os elementos da matriz que relacionam as deformações e as tensões são as propriedades elásticas do material:

E_s, E_θ, E_z - módulo de elasticidade longitudinal.

$G_{s\theta}, G_{sz}, G_{\theta z}$ - módulo de elasticidade transversal.

ν_{ij} ; $i, j = s, \theta, z$ - coeficiente de Poisson.

Essas propriedades podem ser relacionadas entre si, pois os módulos de elasticidade longitudinal e os coeficientes de Poisson são dependentes e podem ser expressos por:

$$\frac{\nu_{sz}}{E_z} = \frac{\nu_{zs}}{E_s} ; \frac{\nu_{\theta z}}{E_z} = \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta} ; \frac{\nu_{s\theta}}{E_\theta} = \frac{\nu_{\theta s}}{E_s} \quad (2.5)$$

O material, no presente trabalho, será considerado com uma ortotropia especial em que as propriedades elásticas nas direções s e θ são as mesmas e com valores diferentes na direção z . Assim, as propriedades elásticas acima serão escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_s &= E_\theta = E & \nu_{s\theta} &= \nu \\ G_{sz} &= G_{\theta z} = G_z & \nu_{sz} &= \nu_{\theta z} = \nu_z \\ G_{s\theta} &= G & \alpha_{ts} &= \alpha_{t\theta} = \alpha_{tz} = \alpha \end{aligned} \quad (2.6)$$

Introduzindo as definições (2.6) na matriz (2.4) e invertendo-a obtemos as tensões em função das deformações, como:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\bar{E}}{(1 - \nu^2)} \{ (1 - \bar{\nu}^2) \epsilon_s + (\nu + \bar{\nu}^2) \epsilon_\theta + \nu_z (1 + \nu) \epsilon_z \} - \\ &\quad - \frac{\bar{E} (1 + \nu_z)}{(1 - \nu)} \alpha T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\bar{E}}{(1 - \nu^2)} \{ (\nu + \bar{\nu}^2) \epsilon_s + (1 - \bar{\nu}^2) \epsilon_\theta + \nu_z (1 + \nu) \epsilon_z \} - \\ &\quad - \frac{\bar{E} (1 + \nu_z)}{(1 - \nu)} \alpha T \end{aligned}$$

$$\sigma_z = \bar{E} \left\{ \frac{\nu_z}{1 - \nu} (\epsilon_s + \epsilon_\theta) + \frac{E_z}{E} \epsilon_z \right\} - \bar{E} \left\{ \frac{2\nu_z}{(1 - \nu)} + \frac{E_z}{E} \right\} \alpha T \quad (2.7)$$

$$\tau_{s\theta} = G \quad \epsilon_{s\theta}$$

$$\tau_{sz} = G_z \quad \epsilon_{sz}$$

$$\tau_{\theta z} = G_z \quad \epsilon_{\theta z}$$

$$\text{onde} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{E}{E_z}} v_z \quad ; \quad \bar{E} = \frac{1 - v}{1 - v - 2\bar{v}^2} E$$

2.3.3. Tensões e momentos resultantes

As tensões e momentos resultantes por unidade de comprimento para o sistema de coordenada ortogonal (s, θ, z) são aqueles definidos em [1,3,4], mostradas na figura 2, e dadas usualmente por:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_{s\theta} \\ Q_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{z} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \tau_{s\theta} \\ \tau_{sz} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz \quad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_s \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{z} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \tau_{s\theta} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) z dz \quad (b)$$

(2.8)

$$\begin{Bmatrix} S_s \\ P_s \\ T_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{z} \begin{Bmatrix} \tau_{sz} \cdot z \\ \sigma_s \left(\frac{z^2}{2}\right) \\ \tau_{sz} \left(\frac{z^2}{2}\right) \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz \quad (c)$$

$$\begin{Bmatrix} A_z \\ B_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{z} \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_z \cdot z \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_s}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz \quad (d)$$

em que $\{N_s, N_{s\theta}, Q_s\}$ e $\{M_s, M_{s\theta}\}$ são, respectivamente, tensões e momentos resultantes atuando na face s .

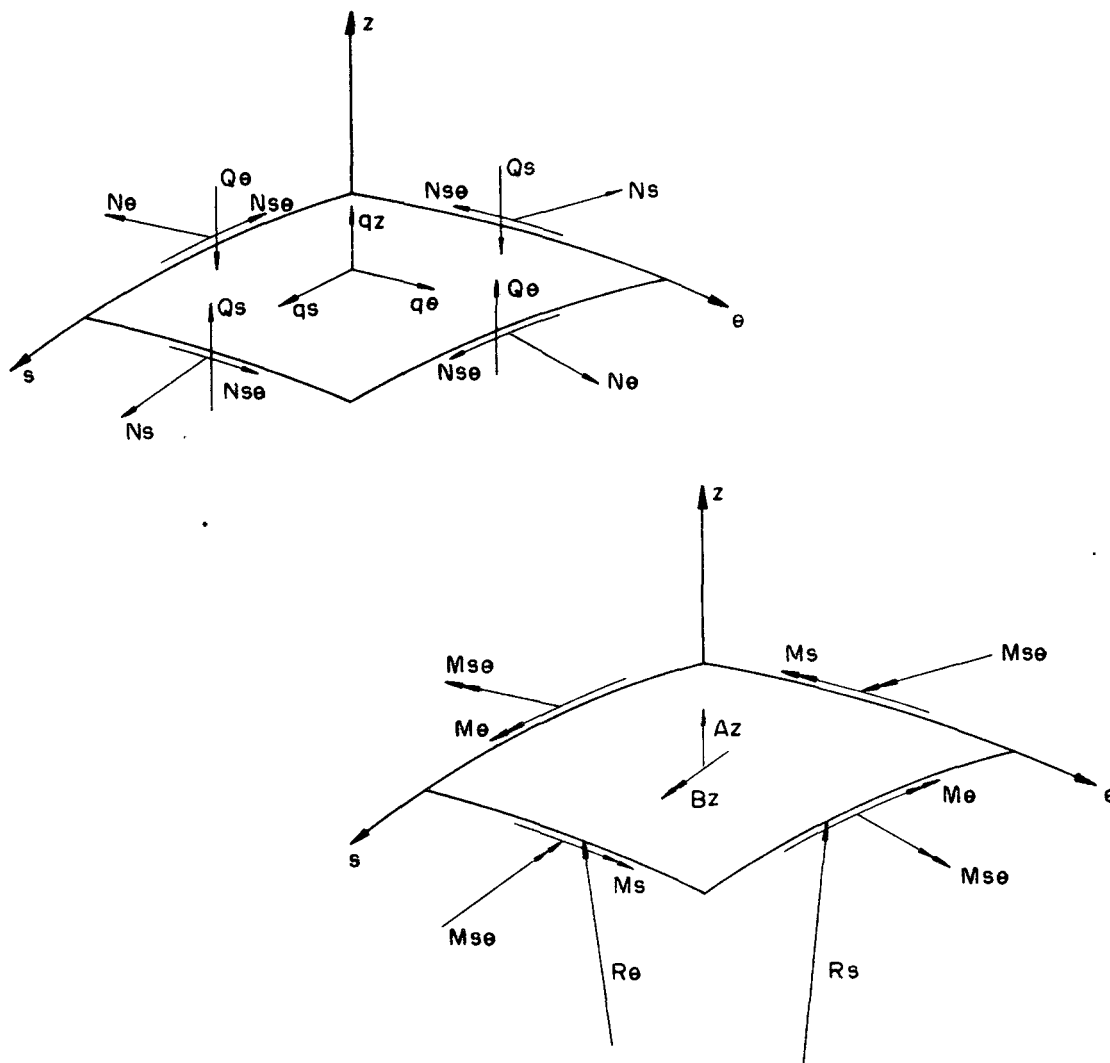


Figura 2 - Tensões resultantes em um elemento genérico da casca.

Os momentos $\{S_s, P_s, T_s$ e $B_z\}$ e a tensão resultantes A_z nas expressões 2.8c e 2.8d são provenientes da inclusão da tensão normal transversal [1].

Para se obter as tensões e momentos resultantes na face θ , basta trocar os índices s por θ e vice-versa.

2.3.4. Relações tensões resultantes-deformações

Para se obter as relações tensões resultantes-deformações substitui-se as expressões 2.3 em 2.7 e as assim obtidas em

2.8, integrando-as ao longo de z .

Para realizar a integração ao longo de z , considera-se que:

$$\left(1 + \frac{z}{R_i}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{z}{R_i} + \left(\frac{z}{R_i}\right)^2 \quad (2.9)$$

sendo os demais termos desprezados.

Durante o processo de integração são levadas em conta as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1 + z/R_\theta}{1 + z/R_S} dz &= h \left[1 + \left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}\right) \frac{h^2}{12 R_S} \right] \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1 + z/R_\theta}{1 + z/R_S} z dz &= -\left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}\right) \frac{h^3}{12} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1 + z/R_\theta}{1 + z/R_S} z^2 dz &= \frac{h^3}{12} \left[1 + \left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}\right) \frac{3 h^2}{20 R_S} \right] \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1 + z/R_\theta}{1 + z/R_S} z^3 dz &= -\left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}\right) \frac{h^5}{80} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1 + z/R_\theta}{1 + z/R_S} z^4 dz &= \frac{h^5}{80} \left[1 + \left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}\right) \frac{5 h^2}{28 R_S} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde se observa que a integração é feita considerando a superfície média como a superfície de referência, e que os demais termos são desprezíveis quando comparados aos indicados em (2.10). Obtém-se expressões similares trocando os índices s por θ e vice-versa.

Assim procedendo obtém-se as relações tensões resultantes-deformações como:

$$\begin{aligned}
N_S = & \frac{\bar{E}h}{1 - v^2} \{ [(1 - \bar{v}^2) \epsilon_S^0 + (v + \bar{v}^2) \epsilon_\theta^0 + v_Z (1 + v) w'] + \\
& + \frac{h^2}{24} [(1 - \bar{v}^2) \epsilon_S'' + (v + \bar{v}^2) \epsilon_\theta'' + 2v_Z (1 + v) \frac{w''}{R_\theta}] + \\
& + \frac{h^2}{12 R_S} (\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}) (1 - \bar{v}^2) [\frac{\epsilon_S^0}{R_S} - \epsilon_S' + \frac{3h^2}{40 R_S} \epsilon_S''] \} - \\
& - \frac{\bar{E} (1 + v_Z)}{(1 - v)} \propto \int_Z T (1 + \frac{z}{R_\theta}) dz
\end{aligned} \tag{a}$$

$$N_{S\theta} = G h \{ \gamma_S^0 + \gamma_\theta^0 + \frac{h^2}{12} (\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}) [\frac{\gamma_S^0}{R_S} - \beta_S'] \} \tag{b}$$

$$Q_S = G_Z h \{ \mu_S^0 + \frac{h^2}{24} \mu_S'' + \frac{h^2}{12} (\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta}) [\frac{\mu_S^0}{R_S} - \mu_S' + \frac{3h^2}{40} \mu_S''] \} \tag{c}$$

$$\begin{aligned}
M_S = & \frac{\bar{E} h^3}{12 (1 - v^2)} \{ (1 - \bar{v}^2) \epsilon_S' + (v + \bar{v}^2) \epsilon_\theta' + v_Z (1 + v) (\frac{w'}{R_\theta} + w'') \\
& + (1 - \bar{v}^2) (\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_S}) [\epsilon_S^0 - \frac{3h^2}{20 R_S} \epsilon_S' + \frac{3h^2}{40} \epsilon_S''] \} \\
& - \frac{\bar{E} (1 + v_Z)}{(1 - v)} \propto \int_Z T (1 + \frac{z}{R_\theta}) z dz
\end{aligned} \tag{d}$$

$$M_{S\theta} = \frac{G h^3}{12} \{ \beta_S' + \beta_\theta' + (\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_S}) [\beta_S^0 - \frac{3h^2}{20 R_S} \beta_S'] \} \tag{e}$$

$$S_S = \frac{G_Z h^3}{12} \{ \mu_S' + (\frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_S}) [\mu_S^0 - \frac{3h^2}{20 R_S} \mu_S' + \frac{3h^2}{40} \mu_S''] \} \tag{f}$$

$$\begin{aligned}
P_S = & \frac{\bar{E} h^3}{24 (1 - \nu^2)} \{ (1 - \bar{\nu}^2) \epsilon_S^0 + (\nu + \bar{\nu}^2) \epsilon_\theta^0 + \nu_z (1 + \nu) w' + \\
& + \frac{3 h^2}{40} [(1 - \bar{\nu}^2) \epsilon_S'' + (\nu + \bar{\nu}^2) \epsilon_\theta'' + 2 \nu_z (1 + \nu) \frac{w''}{R_\theta}] + \\
& + \frac{3 h^2}{20} \left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta} \right) (1 - \bar{\nu}^2) \left[\frac{\epsilon_S^0}{R_S} - \epsilon_S' + \frac{5 h^2}{56} \frac{\epsilon_S''}{R_S} \right] \} - \\
& - \frac{\bar{E} (1 + \nu_z)}{(1 - \nu)} \alpha \int_z T (1 + \frac{z}{R}) \left(\frac{z^2}{2} \right) dz
\end{aligned} \tag{g}$$

(2.11)

$$T_S = \frac{G_z h^3}{24} \{ \mu_S^0 + \frac{3 h^2}{40} \mu_S'' + \frac{3 h^2}{20} \left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_\theta} \right) \left[\frac{\mu_S^0}{R_S} - \mu_S' + \frac{5 h^2}{56 R_S} \mu_S'' \right] \} \tag{h}$$

$$\begin{aligned}
A_z = & \bar{E} h \left\{ \frac{\nu_z}{1 - \nu} (\epsilon_S^0 + \epsilon_\theta^0) + \frac{E_z}{E} \omega' + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\nu_z}{1 - \nu} \left(\frac{\epsilon_S'}{R_\theta} + \frac{\epsilon_\theta'}{R_S} + \frac{1}{2} (\epsilon_S'' + \epsilon_\theta'') \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{E_z}{E} \left(\frac{w''}{R_S R_\theta} + w'' \left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_\theta} \right) \right) \right] \} - \\
& - \bar{E} \left[\frac{2 \nu_z}{(1 - \nu)} + \frac{E_z}{E} \right] \alpha \int_z T (1 + \frac{z}{R_S}) (1 + \frac{z}{R_\theta}) dz
\end{aligned} \tag{i}$$

$$\begin{aligned}
B_z = & \frac{\bar{E} h^3}{12} \left\{ \frac{\nu_z}{1 - \nu} \left[\frac{\epsilon_S^0}{R_\theta} + \frac{\epsilon_\theta^0}{R_S} + \epsilon_S' + \epsilon_\theta' + \frac{3 h^2}{40} \left(\frac{\epsilon_S''}{R_\theta} + \frac{\epsilon_\theta''}{R_S} \right) \right] + \right. \\
& + \left. \frac{E_z}{E} \left[\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_\theta} \right) w' + w'' + \frac{3 h^2}{20} \frac{w''}{R_S R_\theta} \right] \right\} - \\
& - \bar{E} \left[\frac{2 \nu_z}{1 - \nu} + \frac{E_z}{E} \right] \alpha \int T (1 + \frac{z}{R_S}) (1 + \frac{z}{R_\theta}) z dz
\end{aligned} \tag{j}$$

Para obter as tensões resultantes na face normal a direção θ basta trocar os índices s por θ e vice-versa.

2.3.5. Equações de equilíbrio

Para determinar as equações de equilíbrio e as condições de contorno naturais e geométricas de uma casca os métodos mais utilizados recentemente são os baseados nos princípios variacionais. Dentre eles, o método adotado neste trabalho é o princípio da energia potencial mínima.

Este princípio está baseado no seguinte teorema:

"De todos os campos de deslocamentos que satisfazem as condições de contorno, o que mais se aproxima do campo de deslocamento sob o qual o corpo está em equilíbrio é aquele que torna a energia potencial um mínimo" [11].

Para utilizá-lo tem-se que determinar a energia potencial total. Para isso, considera-se um corpo elástico contínuo (casca) em equilíbrio sujeito a uma distribuição de forças de corpo F e uma distribuição de forças de superfície T . As forças de superfícies são conhecidas sobre parte da superfície denominada de S_t e sobre o restante da superfície (S_u) são prescritos os deslocamentos.

A energia potencial total de um corpo em equilíbrio, produzida por um campo de deslocamento devido à ação de forças do corpo e de superfícies é dado por:

$$\pi = U_e + V_e \quad (2.12)$$

onde U_e é a energia de deformação do corpo para um processo isentrópico e V_e é a energia potencial devido a ação das forças externas e

$$V_e = -\int_V F \cdot U \, dV - \int_S T \cdot U \, dS \quad (2.13)$$

substituindo a expressão 2.13 em 2.12 a expressão da energia potencial total pode ser reescrita como:

$$\pi = U_e - \int_V F \cdot U \, dV - \int_S T \cdot U \, dS \quad (2.14)$$

Para que π seja um mínimo é necessário que $\delta\pi = 0$ [12]. Aplicando, então, a variação dos deslocamentos na equação 2.14, chega-se as equações de equilíbrio e as condições de contorno geométricas e naturais [11]. Os componentes da equação 2.14 podem ser definidos como segue.

Para um elemento de casca a energia de deformação é determinada a partir da função densidade de energia de deformação P , como sendo:

$$U_e = \int_V P \, dV \quad (2.15)$$

onde, no caso de um material elástico-linear:

$$P = \frac{1}{2} (\sigma_s \epsilon_s + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{s\theta} \epsilon_{s\theta} + \tau_{sz} \epsilon_{sz} + \tau_{\theta z} \epsilon_{\theta z}) - \\ - E\alpha T (\epsilon_s + \epsilon_\theta + \epsilon_z)/(1 - 2\nu) \quad (2.16)$$

As forças de corpo e de superfície que atuam sobre uma casca podem ser substituídas por forças equivalentes atuando na superfície de referência. Desse modo, considere que o trabalho das forças atuando nas superfícies externa e interna sejam dadas por:

$$W_{sup} = \int_s \int_\theta \{ [q_s^+ U^+ + q_\theta^+ V^+ + q_z^+ W^+] (1 + \frac{h}{2R_s})(1 + \frac{h}{2R_\theta}) + \\ + [q_s^- U^- + q_\theta^- V^- + q_z^- W^-] (1 - \frac{h}{2R_s})(1 - \frac{h}{2R_\theta}) \} AB \, ds \, d\theta \quad (2.17)$$

em que q_i^+ e q_i^- ($i = s, \theta, z$) são mostrados na figura 3 e podem ser substituídos por forças equivalentes atuando na superfície de referência. Essas forças equivalentes são obtidas substituindo as expressões 2.2 em 2.17. Dessa forma, o trabalho das forças de superfície pode ser reescrito em função forças equivalentes, como:

$$W_{sup} = \int_s \int_\theta (q_s u + q_\theta v + q_z w + m_s \beta_s + m_\theta \beta_\theta + \\ + m_z w' + \frac{1}{2} h^2 q_z w'') AB \, ds \, d\theta \quad (2.18)$$

em que q_i e m_i ($i = s, \theta, z$) são as forças e momentos equivalentes atuando na superfície de referência e dadas por:

$$q_i = q_i^+ \left(1 + \frac{h}{2R_s}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_\theta}\right) + q_i^- \left(1 - \frac{h}{2R_s}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_\theta}\right) \quad (2.19)$$

$$m_i = \frac{h}{2} \left[q_i^+ \left(1 + \frac{h}{2R_s}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_\theta}\right) + q_i^- \left(1 - \frac{h}{2R_s}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_\theta}\right) \right]$$

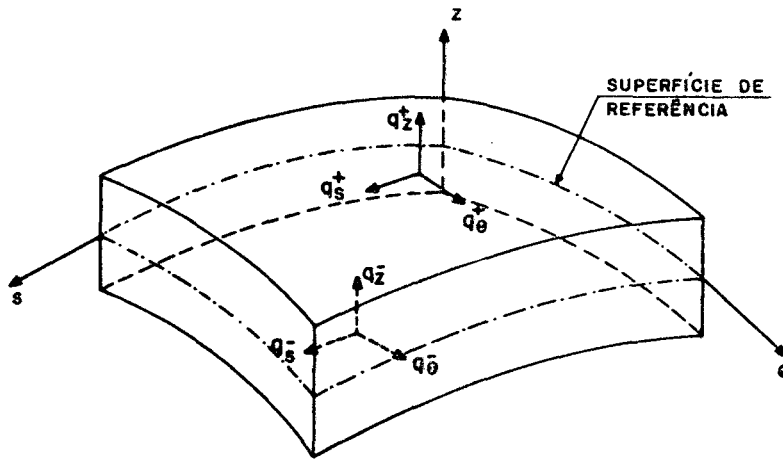


Figura 3

As forças de corpo que podem aparecer na casca podem ser calculadas e adicionadas às forças equivalentes que atuam na superfície de referência ($q_s, q_\theta, q_z, m_s, m_\theta, m_z$) na expressão 2.18.

Deve-se, ainda, considerar o trabalho realizado pelas tensões no contorno da casca que é dado por:

$$W_s = \int_\theta \int_z (\bar{\sigma}_s U + \bar{\tau}_{s\theta} V + \bar{\tau}_{sz} W) B \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) d\theta dz \quad (2.20)$$

Assim a energia potencial total de um elemento de casca pode ser reescrita como sendo:

$$\pi = U_\epsilon - W_{sup} - W_s \quad (2.21)$$

Integrando as equações 2.15 e 2.20 ao longo da coordenada z , obtêm-se as expressões da energia de deformação e do trabalho realizado pelas tensões nos contornos em função das tensões e momentos resultantes. Substituindo as relações Bl.6 em 2.3 obtêm as deformações em termos dos deslocamentos, e essas expressões substituídas na expressão da energia de deformação possibilita obter (através de 2.21), a energia potencial total em função das tensões e momentos resultantes, dos deslocamentos e das forças equivalentes atuando na superfície de referência.

Aplicando a variação na expressão da energia potencial total (2.21) e considerando que os deslocamentos são arbitrários, verifica-se que para a variação da energia potencial total seja nula (o que a torna um mínimo) é necessário que as expressões que precedem os deslocamentos virtuais sejam nulas, as quais se tornam as equações de equilíbrio do corpo e as condições de contorno naturais.

Assim procedendo [1] obtêm-se as equações diferenciais de equilíbrio, que são:

$$\frac{\partial}{\partial s} (N_s B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta s} A) + N_{s\theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} - N_{\theta} \frac{\partial B}{\partial s} + Q_s \frac{AB}{R_s} = -AB q_s$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (N_{s\theta} B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta} A) + N_{\theta s} \frac{\partial B}{\partial s} - N_s \frac{\partial A}{\partial \theta} + Q_{\theta} \frac{AB}{R_{\theta}} = -AB q_{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (Q_s B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_{\theta} A) - AB \left(\frac{N_s}{R_s} + \frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} \right) = -AB q_z$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (M_s B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta s} A) + M_{s\theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} - M_{\theta} \frac{\partial B}{\partial s} - Q_s AB = -AB m_s$$

(2.22)

$$\frac{\partial}{\partial s} (M_{s\theta} B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta} A) - M_s \frac{\partial A}{\partial \theta} + M_{\theta s} \frac{\partial B}{\partial s} - Q_{\theta} AB = -AB m_{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (S_s B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (S_\theta A) - AB \left(\frac{M_s}{R_s} + \frac{M_\theta}{R_\theta} \right) - AB A_z = -AB m_z$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (T_s B) + \frac{\partial}{\partial \theta} (T_\theta A) - AB \left(\frac{P_s}{R_s} + \frac{P_\theta}{R_\theta} \right) - AB B_z = -\frac{1}{8} h^2 AB q_z$$

e as condições de contorno naturais e geométricas:

$$\begin{aligned} N_s &= \bar{N}_s & \text{ou} & \quad u = \bar{u} \\ N_{s\theta} &= \bar{N}_{s\theta} & \text{ou} & \quad v = \bar{v} \\ Q_s &= \bar{Q}_s & \text{ou} & \quad w = \bar{w} \\ M_s &= \bar{M}_s & \text{ou} & \quad \beta_s = \bar{\beta}_s \\ M_{s\theta} &= \bar{M}_{s\theta} & \text{ou} & \quad \beta_\theta = \bar{\beta}_\theta \\ S_s &= \bar{S}_s & \text{ou} & \quad w' = \bar{w}' \\ T_s &= \bar{T}_s & \text{ou} & \quad w'' = \bar{w}'' \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $(\bar{})$ são valores especificados no contorno.

2.4. Teoria para Cascas Semi-Espessas de Revolução

2.4.1. Relações deformações-deslocamentos

Observando as hipóteses adotadas no item 2.2, para casca semi-espessa, obter-se-á a teoria e modelo analítico que será utilizado neste trabalho.

Assim sendo, ao se desprezar os efeitos devido a inclusão da tensão normal transversal, simplifica-se a expressão do deslocamento W adotado em (2.2), enquanto que as expressões dos deslo

camentos U e V permanecem os mesmos. Desta forma, o deslocamento W assumido para teoria de cascas semi-espessas é dado:

$$W(s, \theta, z) = w(s, \theta) \quad (2.24)$$

Substituindo as expressões de U e V de 2.2 e a definição de W (2.24) nas relações deformações-deslocamentos da elasticidade B1.1, obtém-se as relações deformações-deslocamentos para cascas semi-espessas (Apêndice C). Desenvolvendo essas relações para cascas de revolução, através da utilização dos coeficientes de Lamé para um sistema de coordenadas ortogonais, e adimensionalizando as variáveis envolvidas utilizando as expressões C1.3, determinam-se as relações deformações-deslocamentos para cascas de revolução semi-espessas com um sistema de coordenadas ortogonais (ξ, θ, z) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi} &= \frac{1}{(a+z\omega_{\xi})} [\dot{u} + \omega_{\xi} w + z\beta'_{\xi}] \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{(a+z\omega_{\theta})} \left[\frac{\dot{v}}{\rho} + \gamma u + \omega_{\theta} w + z \left(\frac{\dot{\beta}_{\theta}}{\rho} + \gamma\beta_{\xi} \right) \right] \\ \epsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\epsilon_{\xi\theta} = \frac{1}{(a+z\omega_{\xi})} [\dot{v} + z\beta'_{\theta}] + \frac{1}{(a+z\omega_{\theta})} \left[\frac{\dot{u}}{\rho} - \gamma v + z \left(\frac{\dot{\beta}_{\xi}}{\rho} - \gamma\beta_{\theta} \right) \right]$$

$$\epsilon_{\xi z} = \frac{1}{(a+z\omega_{\xi})} [a\beta_{\xi} + \dot{w} - \omega_{\xi} u]$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{(a+z\omega_{\theta})} [a\beta_{\theta} + \frac{\dot{w}}{\rho} - \omega_{\theta} v]$$

onde

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial \xi} (\quad) \text{ e } (\quad)' = \frac{\partial}{\partial \theta} (\quad)$$

2.4.2. Relações tensão-deformações

Nesta teoria, considera-se que σ_z é pequeno comparado com as demais tensões e a deformação normal transversal ϵ_z é considerada nula, o que faz com que os valores de w' e w'' também sejam nulos. Por isso, assume-se que o valor de v_z é nulo. Assim, o valor de \bar{v} se anula e as equações 2.7 ficam da seguinte forma:

$$\sigma_\xi = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \{ \epsilon_\xi + \nu \epsilon_\theta \} - \frac{E \alpha}{1 - \nu} T$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \{ \nu \epsilon_\xi + \epsilon_\theta \} - \frac{E \alpha}{1 - \nu} T$$

$$\tau_{\xi\theta} = G \epsilon_{\xi\theta} \quad (2.26)$$

$$\tau_{\xi z} = G_z \epsilon_{\xi z}$$

$$\tau_{\theta z} = G_z \epsilon_{\theta z}$$

2.4.3. Tensões e momentos resultantes

Assim também as tensões e momentos que aparecem 2.8c e d, são eliminadas pelas hipóteses adotadas na teoria de casca semi espessa, pela exclusão de σ_z e permanecem as seguintes tensões e momentos resultantes:

$$\begin{bmatrix} N_\xi \\ N_{\xi\theta} \\ Q_\xi \end{bmatrix} = \int_z \begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\theta} \\ \tau_{\xi z} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) dz$$

$$\begin{bmatrix} M_{\xi} \\ M_{\xi\theta} \end{bmatrix} = \int_z \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} \\ \tau_{\xi\theta} \end{bmatrix} z \left(1 + \frac{z}{R_{\theta}}\right) dz \quad (2.27)$$

que estão aplicados na face ξ do elemento de casca. Para se obter as tensões e momentos resultantes na face θ , basta trocar os índices ξ por θ e vice-versa.

2.4.4. Relações tensões resultantes-deformações

As tensões e momentos resultantes que aparecem na teoria de cascas semi-espessas são dadas em função das deformações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} N_{\xi} &= \frac{E h}{(1 - \nu^2)} \{ \epsilon_{\xi}^o + \nu \epsilon_{\theta}^o + \frac{h^2}{12 R_{\xi}} \left(\frac{1}{R_{\xi}} - \frac{1}{R_{\theta}} \right) \\ &\quad \left(\frac{\epsilon_{\xi}^o}{R_{\xi}} - \epsilon'_{\xi} \right) \} - \frac{E \alpha}{(1 - \nu)} \int_z T \left(1 + \frac{z}{R_{\theta}} \right) dz \\ N_{\xi\theta} &= G h \{ \gamma_{\xi}^o + \gamma_{\theta}^o + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_{\xi}} - \frac{1}{R_{\theta}} \right) \frac{\gamma_{\xi}^o}{R_{\xi}} \} \\ Q_{\xi} &= G_z h \{ \mu_{\xi}^o + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_{\xi}} - \frac{1}{R_{\theta}} \right) \frac{\mu_{\xi}^o}{R_{\xi}} \} \\ M_{\xi} &= \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \{ \epsilon'_{\xi} + \nu \epsilon'_{\theta} + \left(\frac{1}{R_{\theta}} - \frac{1}{R_{\xi}} \right) (\epsilon_{\xi}^o - \frac{3h^2}{20R_{\xi}} \epsilon'_{\xi}) \} \\ &\quad - \frac{E \alpha}{(1 - \nu)} \int_z T \left(1 + \frac{z}{R_{\theta}} \right) z dz \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$M_{\xi\theta} = \frac{G h^3}{12} \left\{ \beta_{\xi}' + \beta_{\theta}' + \left(\frac{1}{R_{\theta}} - \frac{1}{R_{\xi}} \right) \beta_{\xi}^0 \right\}$$

que estão aplicados na face ξ . Para obter essas tensões e momentos resultantes para face θ basta trocar os índices ξ por θ e vice-versa.

2.4.5. Equações de equilíbrio

Substituindo as expressões 2.25 em 2.26 e as equações assim obtidas nas expressões da energia potencial total 2.21, observando as definições 2.27 e aplicada a variação no campo de deslocamento na energia potencial, obtêm-se as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno geométricas e naturais, que regem os problemas para cascas semi-espessas, baseadas nas hipóteses assumidas no item 2.2.

Desta forma as equações diferenciais de equilíbrio para uma casca de revolução, observando a adimensionalização dada por Bl.3 são assim definidas:

$$N_{\xi}' + \dot{N}_{\theta\xi}/\rho + \gamma (N_{\xi} - N_{\theta}) + \omega_{\xi} Q_{\xi} = -a q_{\xi}$$

$$N_{\xi\theta}' + \dot{N}_{\theta}/\rho + \gamma (N_{\xi\theta} + N_{\theta\xi}) + \omega_{\theta} Q_{\theta} = -a q_{\theta}$$

$$Q_{\xi}' + \dot{Q}_{\theta}/\rho + \gamma Q_{\xi} - \omega_{\xi} N_{\xi} + \omega_{\theta} N_{\theta} = -a q_z \quad (2.29)$$

$$M_{\xi}' + \dot{M}_{\theta\xi}/\rho + \gamma (M_{\xi} - M_{\theta}) - a Q_{\xi} = -a m_{\xi}$$

$$M_{\xi\theta}' + \dot{M}_{\theta}/\rho + \gamma (M_{\xi\theta} + M_{\theta\xi}) - a Q_{\theta} = -a m_{\theta}$$

onde:

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial \xi} (\quad) \quad \text{e} \quad (\quad)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\quad)$$

e as condições de contorno naturais e geométricas:

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= \bar{N}_{\xi} & \text{ou} & & u &= \bar{u} \\
 N_{\xi\theta} &= \bar{N}_{\xi\theta} & \text{ou} & & v &= \bar{v} \\
 Q_{\xi} &= \bar{Q}_{\xi} & \text{ou} & & w &= \bar{w} \\
 M_{\xi} &= \bar{M}_{\xi} & \text{ou} & & \beta_{\xi} &= \bar{\beta}_{\xi} \\
 M_{\xi\theta} &= \bar{M}_{\xi\theta} & \text{ou} & & \beta_{\theta} &= \bar{\beta}_{\theta}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.5. Equações de Equilíbrio Adimensionalizadas em Termos dos Deslocamentos para Teoria de Cascas Semi-Espessas de Revolução.

2.5.1. Adimensionalização e expansão das variáveis na direção circunferencial em série de Fourier

Com a expansão das variáveis na direção circunferencial em série de Fourier, transforma-se as equações diferenciais parciais de equilíbrio do corpo, em equações diferenciais ordinárias em relação a variável ξ , para cada harmônico da série de Fourier.

A adimensionalização e expansão das variáveis compatíveis com as cargas e temperaturas é a seguinte:

$$N_{\xi} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{\xi n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$N_{\theta} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$N_{\xi\theta} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{\xi\theta n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$N_{\theta\xi} = \sigma_0 h_0 \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta\xi n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$Q_{\xi} = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\xi n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$Q_{\theta} = \sigma_o h_o \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\theta n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$M_{\xi} = \frac{\sigma_o h_o^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\xi n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$M_{\theta} = \frac{\sigma_o h_o^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$M_{\xi\theta} = \frac{\sigma_o h_o^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\xi\theta n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$M_{\theta\xi} = \frac{\sigma_o h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta\xi n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$u = \frac{a \sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi) \cos(n\theta)$$

$$v = \frac{a \sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\xi) \sin(n\theta)$$

$$w = \frac{a \sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi) \cos(n\theta)$$

$$\beta_{\xi} = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\xi n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$\beta_{\theta} = \frac{\sigma_o}{E_o} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\theta n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$q_{\xi} = \frac{\sigma_o h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} q_{\xi n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$q_{\theta} = \frac{\sigma_o h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} q_{\theta n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$q_z = \frac{\sigma_o h_o}{a} \sum_{n=0}^{\infty} q_{zn}(\xi) \cos(n\theta)$$

(2.31)

$$m_{\xi} = \frac{\sigma_0 h_0^3}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} m_{\xi n}(\xi) \cos(n\theta)$$

$$m_{\theta} = \frac{\sigma_0 h_0^3}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} m_{\theta n}(\xi) \sin(n\theta)$$

$$t_{Ti} = \frac{\sigma_0 h_c T_0}{a E_c} \sum_{n=0}^{\infty} t_{Tin}(\xi) \cos(n\theta) \quad i = \xi, \theta$$

$$m_{Ti} = \frac{\sigma_0 h_0^3 T_0}{a E_0} \sum_{n=0}^{\infty} m_{Tin}(\xi) \cos(\theta) \quad i = \xi, \theta$$

onde

σ_0 é a tensão de referência

h_0 é a espessura de referência

a é o comprimento de referência

T_0 é a temperatura de referência

E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal de referência.

Dessa forma, o problema é resolvido para apenas uma componente da série de Fourier (a simétrica ou anti-simétrica conforme o caso). A solução para a outra componente pode ser obtida através de um deslocamento da origem do sistema de referência.

Substituindo as definições 2.31 em 2.29 obtêm-se as equações de equilíbrio de um elemento de casca na forma de equações diferenciais ordinárias.

$$N'_{\xi n} + \frac{n}{\rho} N_{\theta \xi n} + \gamma (N_{\xi n} - N_{\theta n}) + \omega_{\xi} Q_{\xi n} = -q_{\xi n}$$

$$N'_{\xi \theta n} - \frac{n}{\rho} N_{\theta n} + \gamma (N_{\xi \theta n} + N_{\theta \xi n}) + \omega_{\theta} Q_{\theta n} = -q_{\theta n}$$

(2.32)

$$Q'_{\xi n} + \frac{n}{\rho} Q_{\theta n} + \gamma Q_{\xi n} - \omega_{\xi} N_{\xi n} - \omega_{\theta} N_{\theta n} = -q_{zn}$$

$$M'_{\xi n} + \frac{n}{\rho} M_{\theta \xi n} + \gamma (M_{\xi n} - M_{\theta n}) - \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 Q_{\xi n} = -m_{\xi n}$$

$$M'_{\xi \theta n} - \frac{n}{\rho} M_{\theta n} + \gamma (M_{\xi \theta n} + M_{\theta \xi n}) - \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 Q_{\theta n} = -m_{\theta n}$$

2.5.2. Adimensionalização e expansão das tensões e momentos resultantes

As equações das tensões e momentos resultantes em função da variável ξ e do harmônico da série de Fourier, para cascas de revolução semi-espessas são obtidas substituindo as expressões Bl.6 do Apêndice B nas expressões 2.28 e expandindo-as na direção circunferencial em série de Fourier. Desta forma, obtêm-se:

$$N_{\xi n} = b \{u'_n + \omega_{\xi} w_n + v\left(\frac{n}{\rho} v_n + \gamma u_n + \omega_{\theta} w_n\right) +$$

$$\psi(\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) [\omega_{\xi}(u'_n + \omega_{\xi} w_n) - \beta'_{\xi n}]\} - t_{T\xi n}$$

$$N_{\theta n} = b \left\{\frac{u}{\rho} v_n + \gamma u_n + \omega_{\theta} w_n + v(u'_n + \omega_{\xi} w_n) +$$

$$\psi(\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) [\omega_{\theta}\left(\frac{n}{\rho} v_n + \gamma u_n + \omega_{\theta} w_n\right) - \left(\frac{n}{\rho} \beta_{\theta n} + \gamma \beta_{\xi n}\right)]\} - t_{T\theta n}$$

(2.33)

$$N_{\xi \theta n} = \frac{b(1-v)}{2} \{v'_n - \frac{n}{\rho} u_n - \gamma v_n + \psi(\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) [\omega_{\xi} v'_n - \beta'_{\theta n}]\}$$

$$N_{\theta \xi n} = \frac{b(1-v)}{2} \{v'_n - \frac{n}{\rho} u_n - \gamma v_n + \psi(\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) [\omega_{\theta}\left(\frac{n}{\rho} u_n + \gamma v_n\right) -$$

$$- \left(\frac{n}{\rho} \beta_{\xi n} + \gamma \beta_{\theta n}\right)]\}$$

$$Q_{\xi n} = \frac{bz (1 - v)}{2} \{ (\beta_{\xi n} + w'_n - \omega_{\xi} u_n) [1 + \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})] \}$$

$$Q_{\theta n} = \frac{bz (1 - v)}{2} \{ (\beta_{\theta n} - \frac{n}{\rho} w_n - \omega_{\theta} v_n) [1 + \psi \omega_{\theta} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})] \}$$

$$M_{\xi n} = d \{ \beta'_{\xi n} + v (\frac{n}{\rho} \beta_{\theta n} + \gamma \beta_{\xi n}) + (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) [u'_n + \omega_{\xi} w_n - c \psi \omega_{\xi} \beta'_{\xi n}] \} \\ - m_{T\xi n}$$

$$M_{\theta n} = d \{ \frac{n}{\rho} \beta_{\theta n} + \gamma \beta_{\xi n} + v \beta'_{\xi n} + (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) [\frac{n}{\rho} v_n + \gamma u_n + \omega_{\theta} w_n - \\ - c \psi \omega_{\theta} (\frac{n}{\rho} \beta_{\theta n} + \gamma \beta_{\xi n})] \} - m_{T\theta n}$$

$$M_{\xi \theta n} = \frac{d (1 - v)}{2} \{ \beta'_{\theta n} - \gamma \beta_{\theta n} - \frac{n}{\rho} \beta_{\xi n} + (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) [v'_n - c \psi \omega_{\xi} \beta'_{\theta n}] \}$$

$$M_{\theta \xi n} = \frac{d (1 - v)}{2} \{ \beta'_{\theta n} - \gamma \beta_{\theta n} - \frac{n}{\rho} \beta_{\xi n} + (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) [\frac{n}{\rho} u_n + \gamma v_n - \\ - c \psi \omega_{\theta} (\frac{n}{\rho} \beta_{\xi n} + \gamma \beta_{\theta n})] \}$$

onde:

$$b = \frac{\int_z E_z d_z}{(1 - v^2) E_o h_o}$$

$$bz = \frac{\int_z E_z d_z}{(1 - v^2) E_o h_o}$$

$$d = \frac{\int_z E_z^2 d_z}{(1 - v^2) E_o h_o^3}$$

$$\psi = \frac{h^2}{12a^2} \quad c = \frac{9}{5}$$

$$t_{Tin} = \frac{\int_z E \alpha T T_o (1 + \frac{z}{R_j}) dz}{(1 - \nu) \sigma_o h_o}$$

$$m_{Tin} = \frac{a \int_z E \alpha T T_o z (1 + \frac{z}{R_j}) dz}{(1 - \nu) \sigma_o h_o^3 T_o}$$

$$i, j = \xi, \theta$$

2.5.3 Equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos

As equações de equilíbrio 2.32 estão escritas em termos das tensões e momentos resultantes. Substituindo as equações 2.33 em 2.32, obtêm-se as equações de equilíbrio de um elemento de casca em termos dos deslocamentos, a qual é dada por:

$$PX' + QX' + RX = C \quad (2.34)$$

onde $X = \{u_n, v_n, w_n, \beta_{\xi n}, \beta_{\theta n}\}^t$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 & p_{25} \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & p_{52} & 0 & 0 & p_{55} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 & q_{25} \\ q_{31} & 0 & q_{33} & q_{34} & 0 \\ q_{41} & 0 & q_{43} & q_{44} & q_{45} \\ 0 & q_{52} & 0 & q_{54} & q_{55} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}$$

onde os elementos de P, Q, R e C estão indicados no Apêndice D.

2.5.4. Condições de contorno

Para solucionar a equação 2.34 deve-se especificar condições de contorno na estação inicial e final do problema. Pode-se especificar os deslocamentos ou as tensões e momentos resultantes, ou ainda uma combinação linear conforme o tipo de apoio que se tem na casca, nestas estações.

As condições de contorno, então, podem ser especificados sob forma matricial:

$$\Omega Y + \Delta X = D \quad (2.35)$$

onde $Y = \{N_{\xi n}, N_{\xi \theta n}, Q_{\xi n}, M_{\xi n}, M_{\xi \theta n}\}^t$

$$X = \{u_n, v_n, w_n, \beta_{\xi n}, \beta_{\theta n}\}^t$$

e Ω, Δ são as matrizes que especificam as condições de contorno.

Nas equações 2.33, observa-se que as tensões e momentos resultantes são dadas em termos dos deslocamentos e isto pode ser utilizado para obter-se a equação 2.35 como função, apenas dos deslocamentos. Desta forma o vetor Y pode ser escrito:

$$Y = HX' + IX + J \quad (2.36)$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_7 & 0 \\ 0 & b_{13} & 0 & 0 & b_{19} \\ 0 & 0 & b_{25} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 & b_{37} & 0 \\ 0 & b_{43} & 0 & 0 & b_{49} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} b_2 & b_4 & b_6 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{14} & 0 & 0 & 0 \\ b_{22} & 0 & 0 & b_{28} & 0 \\ 0 & 0 & b_{36} & b_{38} & b_{40} \\ 0 & 0 & 0 & b_{48} & b_{50} \end{bmatrix}$$

$$J = \{t_{T\xi n}, 0, 0, m_{T\xi n}, 0\}^t$$

em que se observa a equação 2.36 como uma equação diferencial de 1ª ordem e os elementos das matrizes H, I estão especificados no apêndice E.

As condições de contorno podem ser expressas como:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & & & & \\ & \Omega_2 & & & \\ & & \Omega_3 & & \\ & & & \Omega_4 & \\ & & & & \Omega_5 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & & \\ & \Delta_2 & & & \\ & & \Delta_3 & & \\ & & & \Delta_4 & \\ & & & & \Delta_5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Substituindo a equação 2.36 em 2.35 obtêm-se a equação final que especifica as condições de contorno, como:

$$EX' + FX = G \quad (2.37)$$

de forma que E, F e G são matrizes dadas da seguinte forma:

$$E = \begin{bmatrix} \Omega_1 b_1 & 0 & 0 & \Omega_1 b_7 & 0 \\ 0 & \Omega_2 b_{13} & 0 & 0 & \Omega_2 b_{19} \\ 0 & 0 & \Omega_3 b_{25} & 0 & 0 \\ \Omega_4 b_{31} & 0 & 0 & \Omega_4 b_{37} & 0 \\ 0 & \Omega_5 b_{43} & 0 & 0 & \Omega_5 b_{49} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \Omega_1 b_2 + \Delta_1 & \Omega_1 b_4 & \Omega_1 b_6 & 0 & 0 \\ \Omega_2 b_{12} & \Omega_2 b_{14} + \Delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_3 b_{22} & 0 & \Delta_3 & \Omega_3 b_{28} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_4 b_{36} & \Omega_4 b_{38} + \Delta_4 & \Omega_4 b_{40} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_5 b_{48} & \Omega_5 b_{50} + \Delta_5 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} d_1 + \Omega_1 t_{T\xi n} \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 + \Omega_1 m_{T\xi n} \\ d_5 \end{bmatrix}$$

3. RESULTADOS E CONCLUSÕES

3.1. Introdução

Neste capítulo se tem como objetivo demonstrar a validade da formulação analítica desenvolvida no Capítulo 2. Para isso, apresentam-se as soluções de alguns problemas, obtidas através de solução do sistema de equações de equilíbrio (2.34), que são comparados aos resultados apresentados na referência [2] e aos resultados obtidos através da teoria de cascas finas desenvolvidas em [3].

Tendo em vista as dificuldades de se obter uma solução analítica geral para o conjunto de equações de equilíbrio [1], optou-se pela utilização de uma formulação numérica. Esta formulação numérica é baseada na utilização das equações de diferenças finitas e na obtenção da solução a partir do esquema de Cholesky [13].

A solução numérica dos problemas é obtida através de um programa digital em FORTRAN IV, denominado de CORTER-2, desenvolvido a partir do programa digital CORTER-1.

O programa CORTER-1 foi desenvolvido para se obter a solução numérica de problemas a partir da teoria de cascas finas, baseadas nas hipóteses de Kirchhoff-Love [3]. A solução numérica através deste programa é baseada na formulação desenvolvida a partir das equações de diferenças finitas e nos algoritmos de Cholesky utilizados na solução de sistemas [3].

A formulação numérica é obtida pela utilização das equações de diferenças finitas que são substituídas nas equações diferenciais que governam o problema e nas condições de contorno. Utilizou-se equações de diferenças finitas que apresentam erros de truncamento de 2ª ordem ($O\Delta^2$, onde Δ representa o espaçamento pivot).

Os algoritmos usados na solução de sistemas lineares, resultantes da formulação numérica, são desenvolvidos a partir do esquema de Cholesky.

A partir das hipóteses assumidas pela teoria de cascas finas, obtém-se um sistema de quatro equações diferenciais que rege o problema, as quais formam uma equação diferencial matricial

cujos coeficientes são matrizes 4×4 . Desta forma, os algoritmos utilizados no programa CORTER-1 são desenvolvidos para o uso de matrizes e vetores com dimensões 4×4 e 4×1 , respectivamente.

O programa CORTER-2 é desenvolvido baseado na estrutura do programa CORTER-1. Devido as hipóteses assumidas no item 2.2, o sistema de equações diferenciais que rege o problema de cascas semi-espessas resulta numa equação diferencial matricial cujos coeficientes são matrizes 5×5 (matrizes P, Q e R). Então, modificando as dimensões das matrizes utilizadas no programa CORTER-1, que são 4×4 , para 5×5 e introduzindo novas subrotinas, necessárias devido as hipóteses assumidas, gerou-se o programa CORTER-2, que apresenta a solução numérica para problemas utilizando a teoria de cascas semi-espessas (TCSE) e seu fluxograma é apresentado no Apêndice F.

As equações que compõem a teoria de cascas semi-espessas foram desenvolvidas para calcular o carregamento efetivo que realmente atua na superfície de referência. A correção que é feita através das equações 2.19, é devido ao fato, que na teoria das cascas semi-espessas não se despreza a influência da relação h/R . Nos exemplos descritos no presente capítulo, os carregamentos utilizados, são considerados aplicados diretamente sobre a superfície de referência da casca.

3.2. Casca Cilíndrica de Espessura Constante, Bi-Engastada

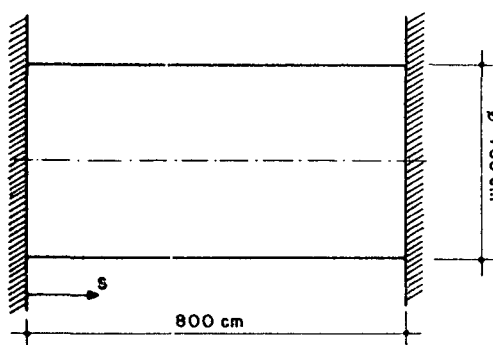


Figura 4

Dados: $E_s = E_\theta = E_z = 2,1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ $\nu = 0,2$
 $\alpha_{ts} = \alpha_{t\theta} = 1 \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$ $r = 200\text{cm}$ $l = 800 \text{ cm}$

$$T_1 = T_2 = 0^\circ\text{C}$$

$$\sigma_0 = 2000 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{tensão de referência})$$

$$h_0 = h \quad (\text{espessura de referência})$$

$$a = 200 \text{ cm} \quad (\text{comprimento de referência})$$

$$E_0 = 2,1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{módulo de elasticidade longitudinal de referência})$$

$$T_0 = 1^\circ\text{C} \quad (\text{temperatura de referência})$$

$$\Delta = 0,02 - \text{espaçamento pivotal adimensionalizado em relação ao comprimento de referência.}$$

$$n^\circ \text{ de pontos pivotaes} = 201.$$

3.2.1. Sujeita a uma pressão interna uniformemente distribuída $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$, $n = 0$.

Para se verificar a validade da formulação analítica desenvolvida no capítulo anterior, este problema é resolvido procedendo-se:

- Análise do comportamento fletor do momento fletor na direção s (M_s) no engastamento para diversas relações de h/R ;
- Estudo do comportamento de M_s e do esforço cortante na direção s (Q_s), do deslocamento radial w e da deformação transversal ϵ_{sz} , ao longo da casca, obtidos pela TCF e TCSE.

1) Momento fletor na direção s

Neste caso compara-se os valores do momento fletor M_s , no engastamento com os resultados apresentados na referência [2] e com os resultados obtidos pela TCF, através do programa digital CORTER-1.

A teoria apresentada na referência [2] baseia-se nas hipóteses assumidas no item 2.2, para teoria de cascas semi-espessas. A formulação analítica, no entanto, difere da adotada no presente trabalho, sendo obtida a partir do princípio variacional de Reissner, através do qual se obtém simultaneamente as equações de equilíbrio e as relações deformações deslocamentos. Na referência [2] os valores de M_s são apresentados graficamente para as relações h/R variando de $1/5$ a $1/20$.

Os valores do momento fletor M_s obtidos pelos programas digitais CORTER-1 (TCF) e CORTER-2 (TCSE) são apresentados na tabela 3.1. Nesta tabela, os valores do momento fletor no engastamento na direção s (M_s) são dados em função de h/R , que varia de $1/5$ a $1/50$.

Verifica-se que os valores do momento fletor da direção s , determinados pela TCSE são menores do que aqueles obtidos pela TCF. Este fato é explicado pela inclusão das deformações cisalhantes transversais na TCSE, pois na TCF tais deformações são consideradas inexistentes.

Vê-se, ainda, que a diferença percentual entre os resultados de ambas teorias diminui até a relação h/R igual a $1/17$ e que a partir desta relação a diferença percentual começa a crescer, embora a diferença absoluta entre os valores continue a diminuir. Explica-se o crescimento da diferença percentual pelos erros inerentes ao processo numérico. Na teoria de cascas semi-espessas (TCSE) as duas últimas equações diferenciais de equilíbrio (2.34) dependem basicamente dos momentos resultantes. Assim os elementos que formam as duas últimas linhas das matrizes P, Q e R dependem fundamentalmente da rigidez flexional e torcional. Em cascas finas a rigidez flexional e torcional é muito menor que a rigidez de membrana. Na medida que h/R diminui, os elementos das duas últimas linhas das matrizes P, Q e R assumem valores que chegam a ser até 1000 vezes menores (quando $h/R = 1/50$) que os elementos da diagonal das demais linhas. Quando se substitui as expressões das equações de diferenças finitas na equação diferencial (2.34) essas matrizes são somadas entre si e formam um sistema de equações lineares, mas mesmo assim continua existindo a diferença entre os valores dos elementos acima citados. Para resolver o sistema de equações lineares através do esquema de Cholesky, necessita-se inverter algumas destas matrizes; acredita-se que durante o processo de inversão, devido tais diferenças, ocorram erros que se propagam ao longo das demais operações inerentes ao processo numérico.

Os valores apresentados na Tabela 3.1 são mostrados graficamente na Figura 5. Nesta figura mostra-se, também, os resultados descritos na referência [2], observando-se que estes valores são próximos dos resultados obtidos pela TCSE.

TABELA 3.1

CASCA CILÍNDRICA n = 0				
Mômento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF %
1/5	- 2289,7	- 1963,3	326,4	14,26
1/6	- 1908,7	- 1667,7	241,0	12,63
1/7	- 1636,8	- 1455,3	181,5	11,09
1/8	- 1433,0	- 1287,3	145,7	10,17
1/9	- 1272,6	- 1156,4	118,2	9,27
1/10	- 1147,9	- 1048,3	99,6	8,68
1/11	- 1044,3	- 957,51	86,8	8,31
1/12	- 957,98	- 881,38	76,64	8,00
1/13	- 884,96	- 816,50	68,46	7,74
1/14	- 822,37	- 759,95	62,42	7,59
1/15	- 768,14	- 709,70	58,44	7,61
1/16	- 720,70	- 667,62	53,08	7,37
1/17	- 678,85	- 629,25	49,60	7,31
1/18	- 641,65	- 593,62	47,89	7,46
1/19	- 608,38	- 563,76	44,62	7,33
1/20	- 578,43	- 536,03	42,40	7,33
1/22	- 526,71	- 486,79	39,92	7,58
1/24	- 483,61	- 445,93	37,68	7,79
1/26	- 446,58	- 409,92	36,66	8,21
1/28	- 415,87	- 380,07	35,80	8,61
1/30	- 388,82	- 353,61	35,21	9,06
1/32	- 365,13	- 331,31	33,82	9,26
1/34	- 344,22	- 310,03	34,19	9,93
1/36	- 325,64	- 291,73	33,92	10,42
1/38	- 309,01	- 275,72	33,29	10,77
1/40	- 294,04	- 260,70	33,34	11,34
1/45	- 262,45	- 228,72	33,73	12,85
1/50	- 237,17	- 203,00	34,17	14,41

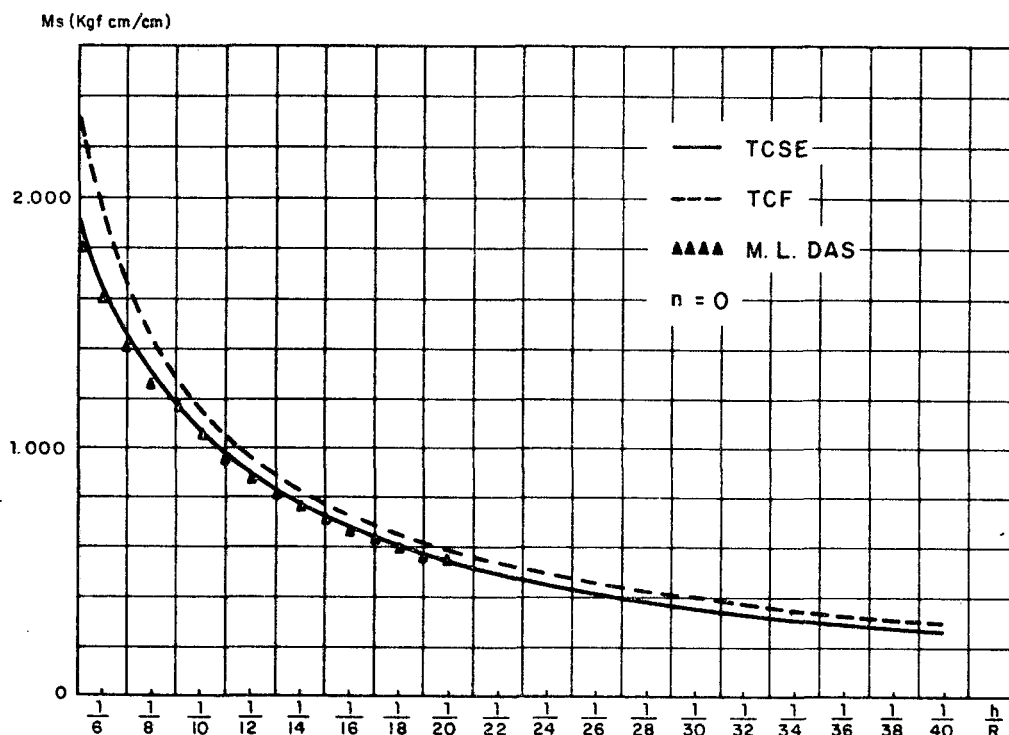


Figura 5 - Momento fletor na direção s e no engastamento para casca cilíndrica sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

2) Comportamento do momento fletor (M_s) e esforço cortante Q_s na direção s , do deslocamento radial w e da deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} , ao longo da casca.

Compara-se, neste item, os valores destas variáveis obtidas respectivamente pelas teorias de cascas semi-espessas (TCSE) e teoria de cascas finas (TCF).

Observando os gráficos das figuras 6, 7, 8 e 9, verifica-se que:

- os valores do momento fletor na direção s , ao longo da casca, obtidos pela TCSE são sempre menores do que os valores obtidos pela TCF.

- o esforço cortante na direção s , ao longo da casca, obtido pela TCSE é menor do que aquele obtido pela TCF, embora para as relações $h/R = 1/15$ e $1/20$, no engastamento isto não ocorra.

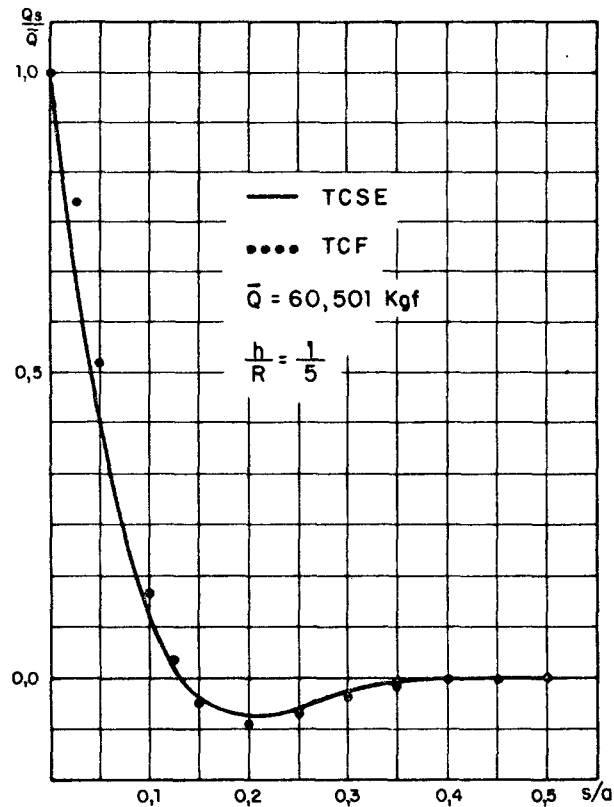
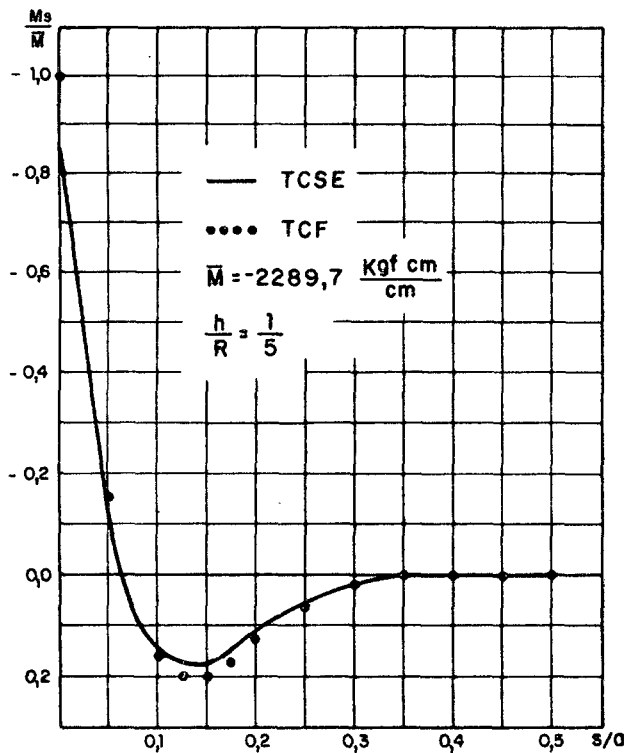
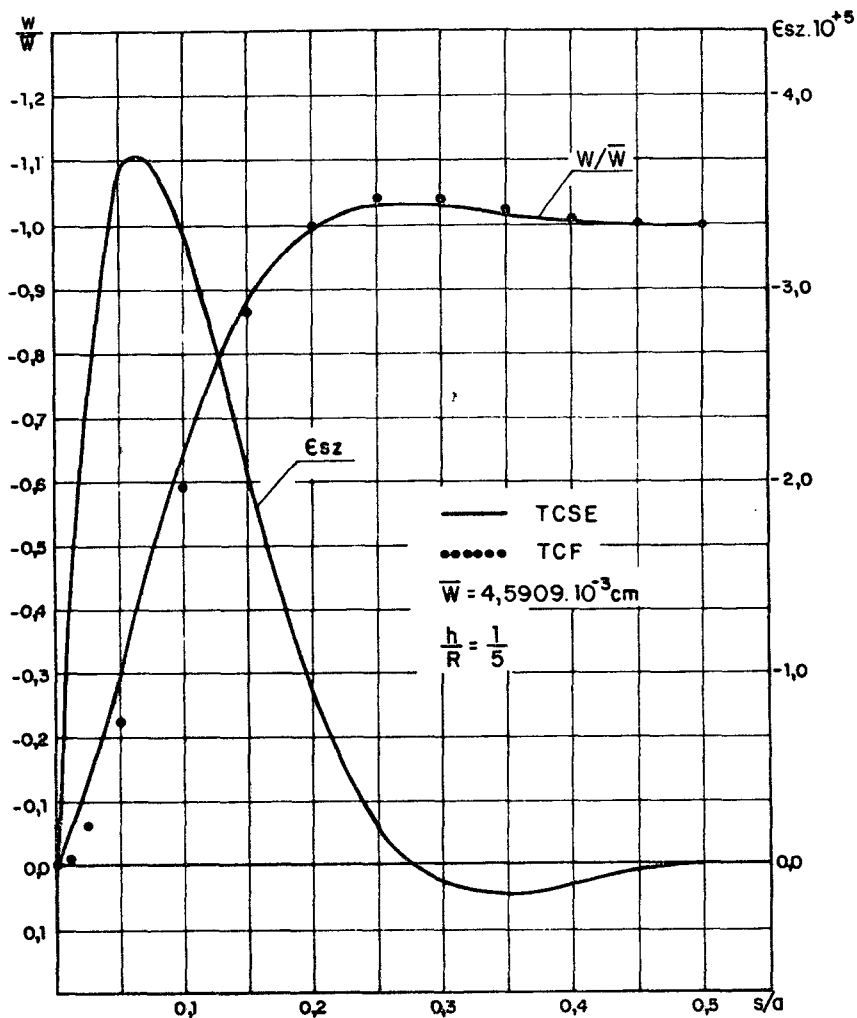


Figura 6 - Comportamento do deslocamento radial w , deformação cisalhante ε_{sz} , momento fletor e esforço cortante na direção s , para $h/R = 1/5$ e $n = 0$.

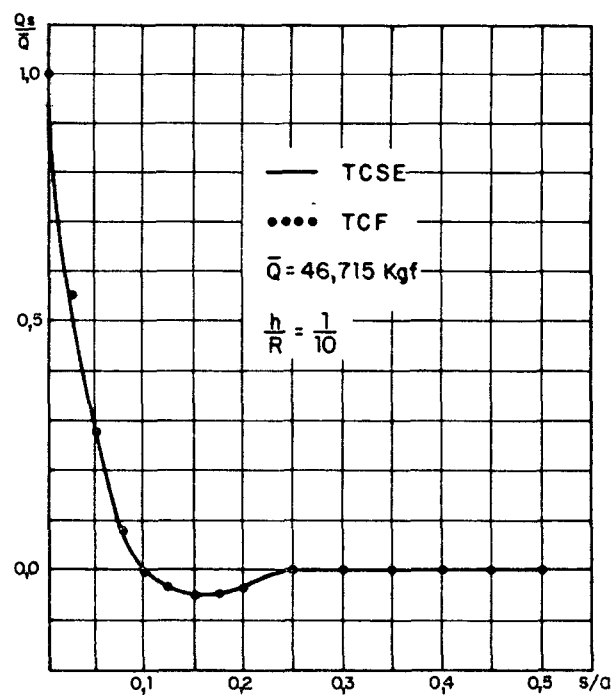
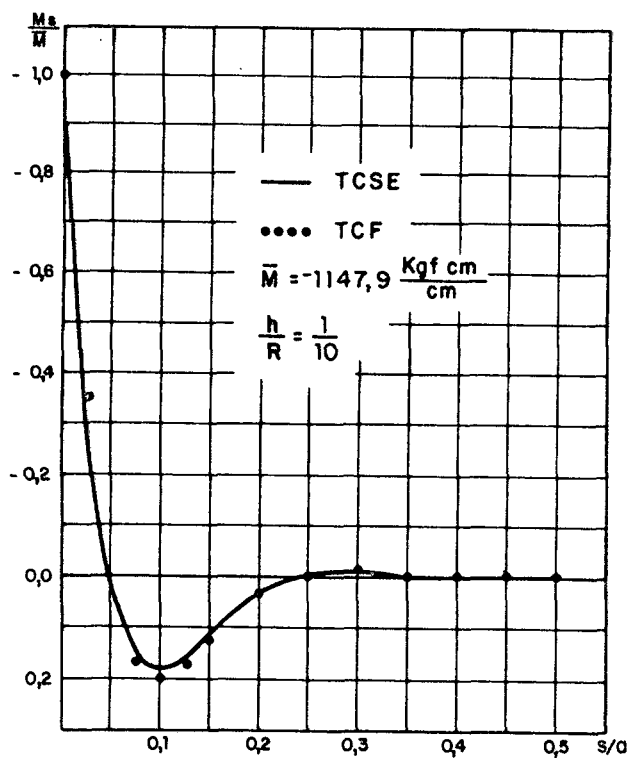
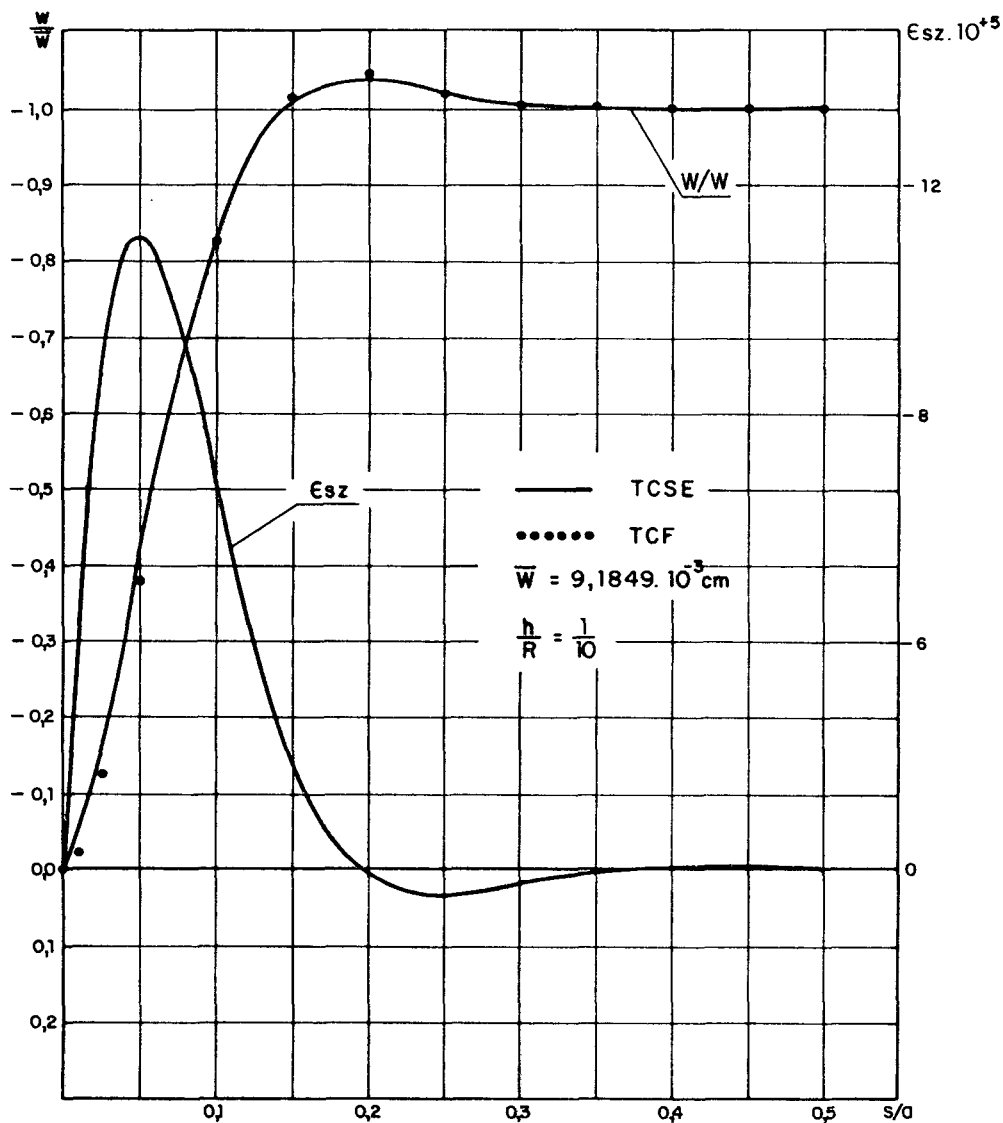


Figura 7 - Comportamento do deslocamento radial w , deformação cisalhante ϵ_{sz} , momento fletor e esforço cortante na direção s , para $h/R = 1/10$ e $n = 0$.

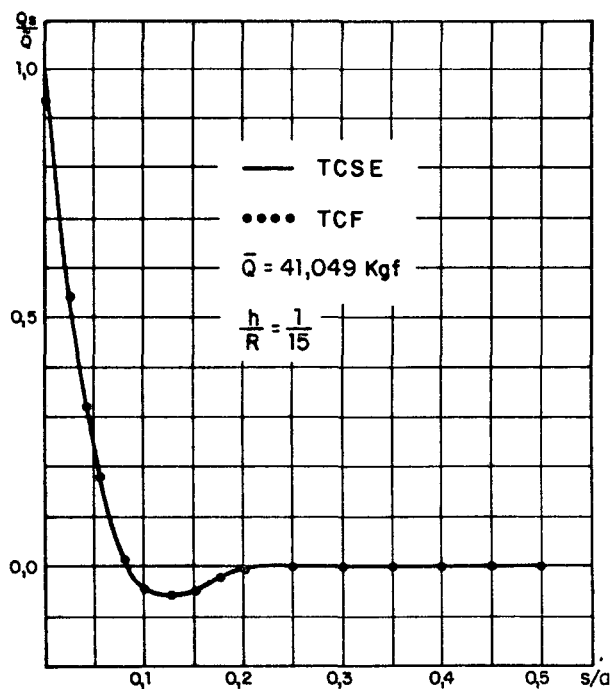
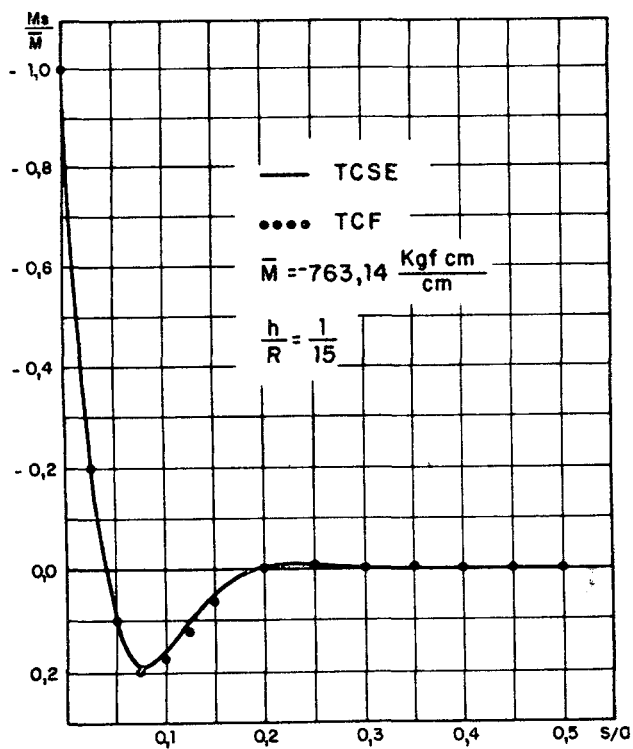
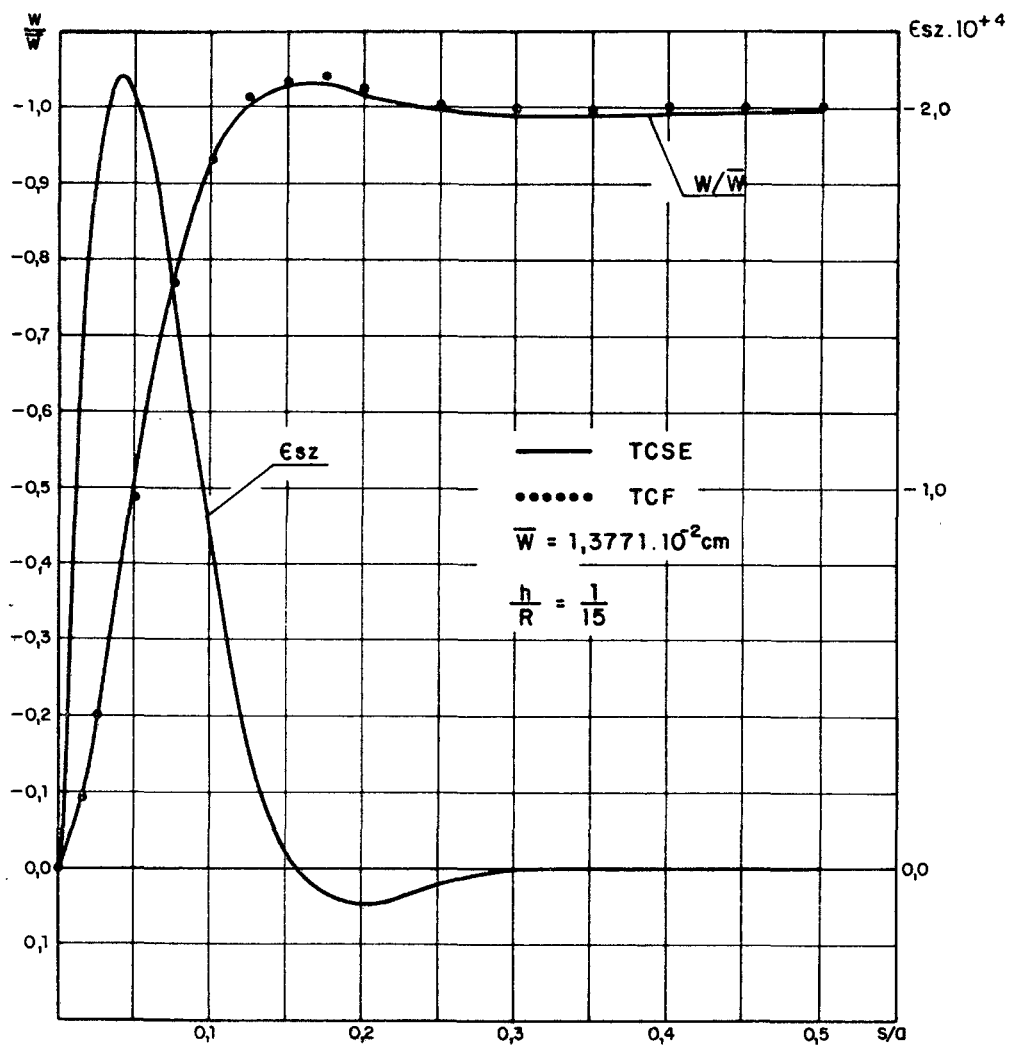


Figura 8 - Comportamento do deslocamento radial w , deformação cisalhante ϵ_{sz} , momento fletor e esforço cortante na direção s , para $h/R = 1/15$ e $n = 0$.

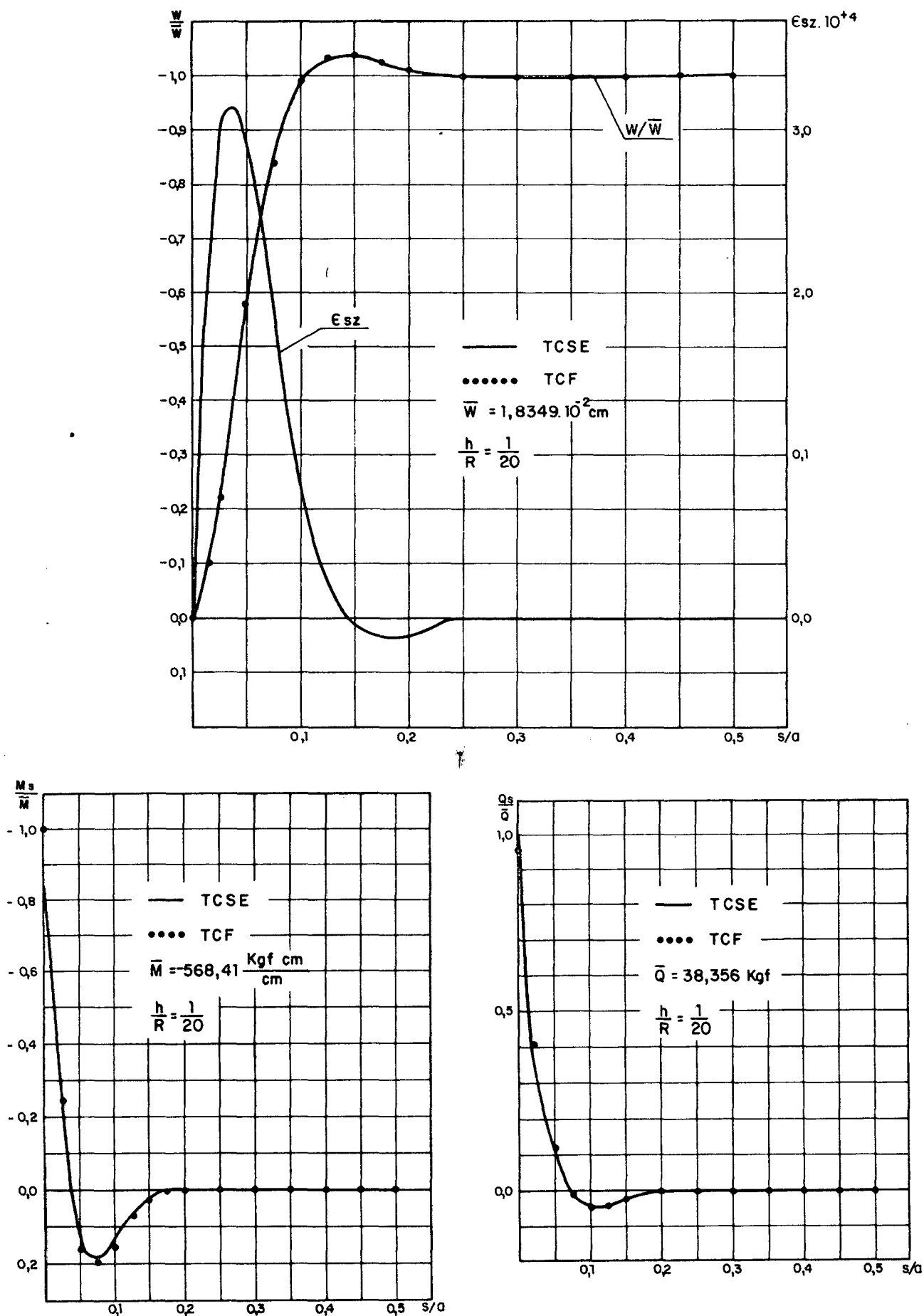


Figura 9. - Comportamento do deslocamento radial w , deformação cisalhante ϵ_{sz} , momento fletor e esforço cortante na direção s , para $h/R = 1/20$ e $n = 0$.

- o deslocamento radial w obtido pela TCSE é maior do que o deslocamento obtido pela TCF até uma dada relação s/a e a partir desta relação o deslocamento w obtido pela TCSE se torna menor do que o deslocamento obtido pela TCF.

O comportamento do momento fletor na direção s , era esperado, visto que a inclusão das deformações cisalhantes transversais na TCSE, tornam este modelo analítico mais flexível que o obtido a partir da TCF.

O esforço cortante na direção s obtido pela TCSE deveria ser menor do que aquele obtido pela TCF. Observa-se, contudo, que nas relações $h/R = 1/15$ e $1/20$, apenas o valor do esforço cortante no engastamento obtido pela TCF é menor do que aquele obtido pela TCSE. Este fato acontece devido a problemas numéricos, pois verifica-se que diminuindo o espaçamento pivotal o esforço cortante obtido pela TCF se torna maior do que o esforço cortante obtido pela TCSE.

Quanto ao deslocamento radial w , acredita-se que seu comportamento seja devido a influência do comportamento da deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} ao longo da casca. Assim sendo, até uma dada relação s/a , a deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} tem um crescimento bastante acentuado e isto incrementa o deslocamento w ; a partir desta relação s/a existe a diminuição da deformação cisalhante transversal, inclusive trocando de sinal próximo à metade da casca, amortecendo o comportamento do deslocamento w , contribuindo para que a partir de uma determinada relação s/a seu valor seja menor do que o deslocamento obtido pela TCF.

3.2.2. Sujeita a uma pressão interna $q_z = \text{kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada θ , $n=1$.

Este problema é basicamente caracterizado pela mudança de carregamento, em relação ao exemplo anterior. Compara-se os valores do momento fletor na direção s no engastamento, obtidos pela teoria de cascas semi-espessas (TCSE) com aqueles obtidos através da teoria de cascas finas (TCF).

Os valores do momento fletor na direção s no engastamento são apresentados na Tabela 3.2, para relações h/R variando de $1/5$ a $1/50$.

TABELA 3.2

CASCA CILÍNDRICA n = 1				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 5638,6	- 5190,5	448,1	7,95
1/6	- 4571,5	- 4228,3	343,1	7,51
1/7	- 3829,8	- 3623,7	206,1	5,38
1/8	- 3282,6	- 3098,6	184,0	5,61
1/9	- 2862,5	- 2703,5	159,0	5,55
1/10	- 2532,7	- 2394,3	138,4	5,46
1/11	- 2268,7	- 2146,1	122,6	5,40
1/12	- 2051,4	- 1938,9	112,5	5,48
1/13	- 1871,9	- 1768,0	103,9	5,55
1/14	- 1718,4	- 1620,7	97,7	5,65
1/15	- 1586,5	- 1492,4	94,1	5,53
1/16	- 1473,6	- 1385,3	88,3	5,99
1/17	- 1374,5	- 1286,8	87,7	6,38
1/18	- 1287,6	- 1202,3	85,3	6,62
1/19	- 1211,0	- 1127,8	84,0	6,94
1/20	- 1141,6	- 1060,0	81,6	7,15
1/22	- 1024,8	- 944,4	80,4	7,84
1/24	- 928,52	- 840,50	88,02	9,48
1/26	- 846,80	- 761,45	85,35	10,08
1/28	- 780,07	- 700,08	79,99	10,25
1/30	- 722,07	- 641,87	80,20	11,11
1/32	- 672,10	- 591,15	80,95	12,04
1/34	- 628,21	- 546,12	82,09	13,07
1/36	- 589,82	- 506,50	83,32	14,13
1/38	- 555,32	- 471,60	83,72	15,08
1/40	- 524,81	- 440,30	84,51	16,10
1/45	- 461,12	- 374,86	86,26	18,71
1/50	- 413,31	- 323,01	90,30	21,85

Verifica-se que as diferenças percentuais entre os momentos fletores obtidos pelas duas teorias se aproximam até a relação h/R igual $1/11$ e após este valor elas crescem. Contudo, observa-se que a diferença absoluta entre os valores diminuem até a relação $h/R = 1/22$ e que após esta relação ela começa a crescer. Este comportamento tem as mesmas causas citadas no exemplo anterior.

Os valores da tabela 3.2 são mostrados graficamente através da figura 10.

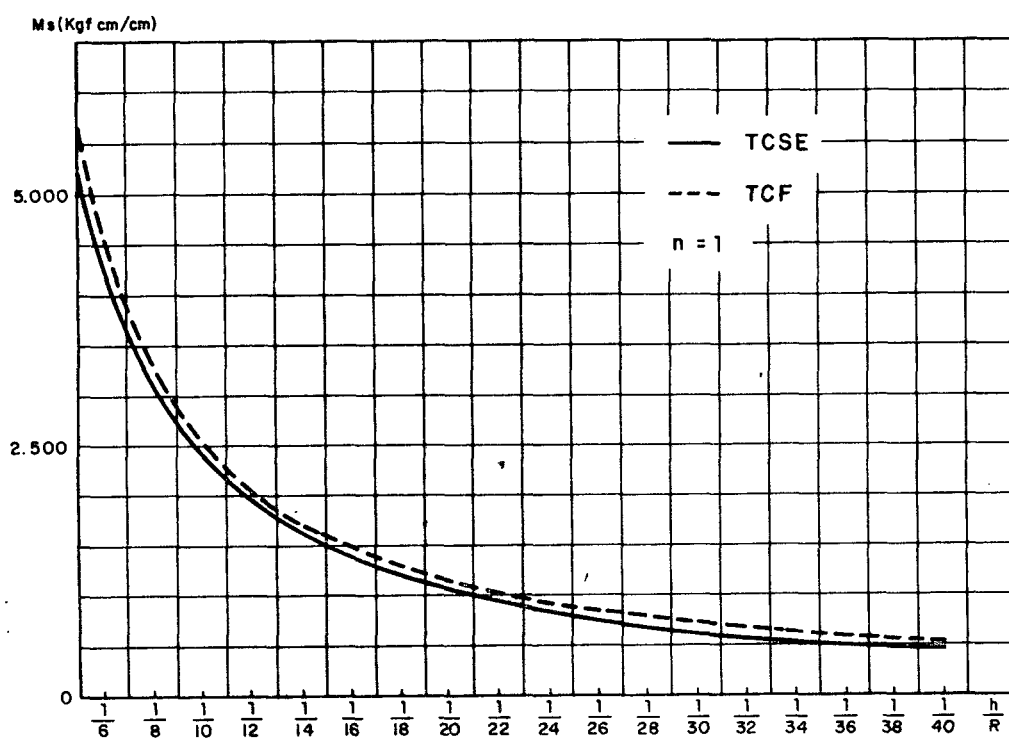


Figura 10 - Momento fletor na direção s e no engastamento, de uma casca cilíndrica com pressão interna de 1 kgf/cm^2 , distribuída cossenoidalmente.

3.3 - Casca cilíndrica de espessura constante, engastada e sob efeito de temperatura.

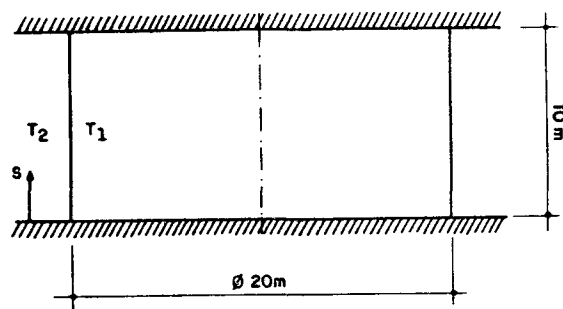


Figura 11

Dados: $E_s = E_\theta = E_z = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ $\nu = 0,3$
 $\alpha_{ts} = \alpha_{t\theta} = 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ $r = 1000 \text{ cm}$ $l = 1000 \text{ cm}$
 $T_1 = T_2 = 100^\circ\text{C}$
 $\sigma_0 = 4000 \text{ kgf/cm}^2$
 $h_0 = h$
 $a = 1000 \text{ cm}$
 $E_0 = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
 $T_0 = 100^\circ\text{C}$

Espaçamento pivotal adimensionalizado em relação ao comprimento de referência $\Delta = 0,005$

Nº de pontos pivotaes = 201.

Neste exemplo os valores do deslocamento w e do momento fletor s são adimensionalizados da seguinte forma:

1) O deslocamento é dividido pela constante adimensionalizadora K_1 que é dada:

$$K_1 = r \alpha T$$

2) E o momento fletor é dividido por K_2

$$K_2 = 2 \mu^2 D K_1$$

onde r = raio da casca
 α = coeficiente de dilatação linear.
 T = temperatura da casca

$$\mu = \left(\frac{3(1 - \nu^2)}{r^2 h^2} \right)^{1/4}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$
 h = espessura da casca
 ν = coeficiente de Poisson

Estas constantes adimensionalizadoras são adotadas no trabalho [3], onde as expressões fazem parte das equações que fornecem os valores analíticos do deslocamento radial e do momento fletor na direção s .

3.3.1. Com temperatura distribuída uniformemente ao longo da coordenada circunferencial θ , $n = 0$.

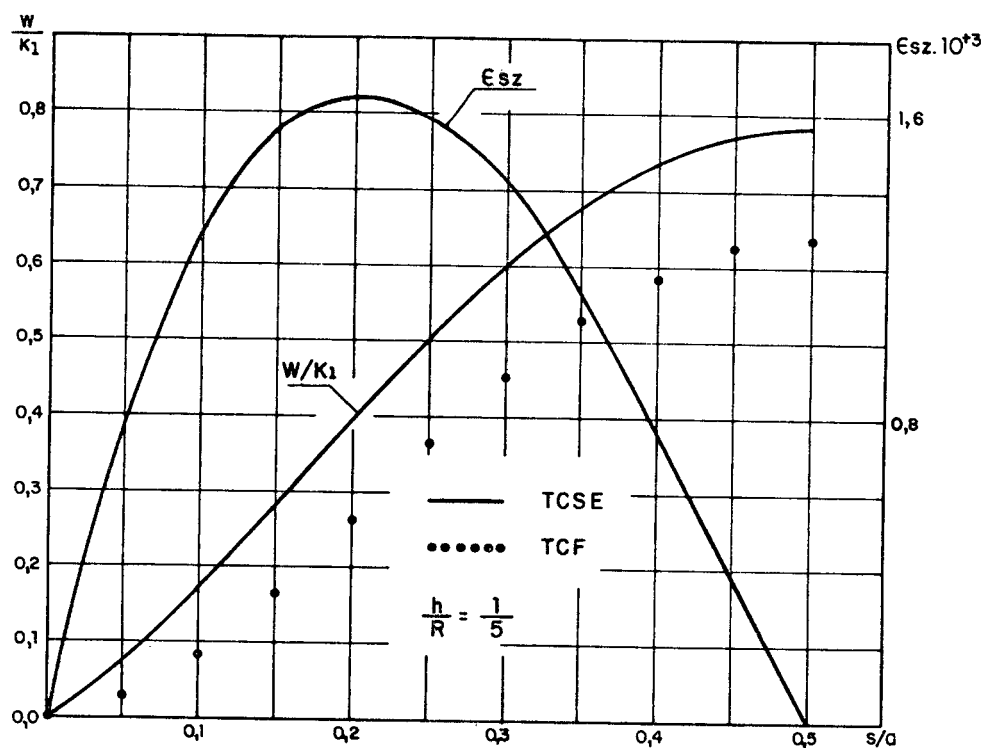
Neste exemplo é analisado o comportamento do momento fletor e esforço cortante na direção s , do deslocamento radial w e da deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} . Estas variáveis são mostradas graficamente nas figuras 12, 13, 14 e 15. Verifica-se, como no exemplo anterior, que:

- o momento fletor e o esforço cortante na direção s , obtidos pela TCSE são sempre menores do que aqueles obtidos pela TCF.

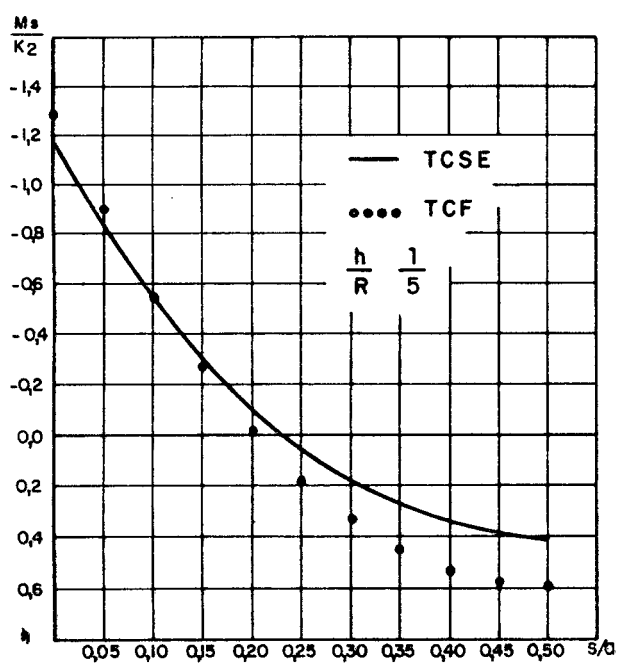
- o deslocamento radial w , para relação $h/R = 1/5$ e $1/10$, obtido pela TCSE é maior que o deslocamento obtido pela TCF e para relações $h/R = 1/15$ e $1/20$, verifica-se que a partir de um dado valor de s/a , o deslocamento w obtido pela TCSE se torna menor do que aquele obtido pela TCF.

Quanto ao comportamento do momento fletor e do esforço cortante, as considerações são as mesmas do item 3.2.1.

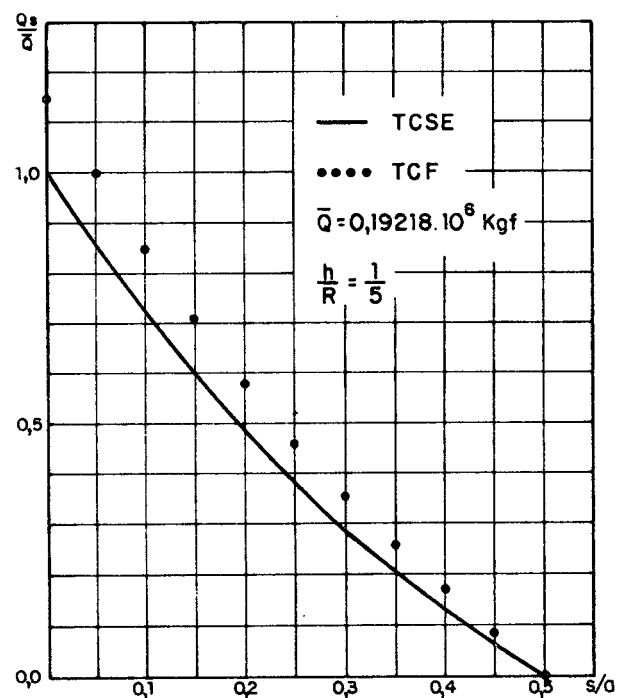
O deslocamento radial w se comporta um pouco diferente do exemplo do item 3.2.1. Como pode-se notar nas figuras 12, 13, 14 e 15, o deslocamento radial também sofre a influência da deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} . Observa-se que para cascas es-



(a)

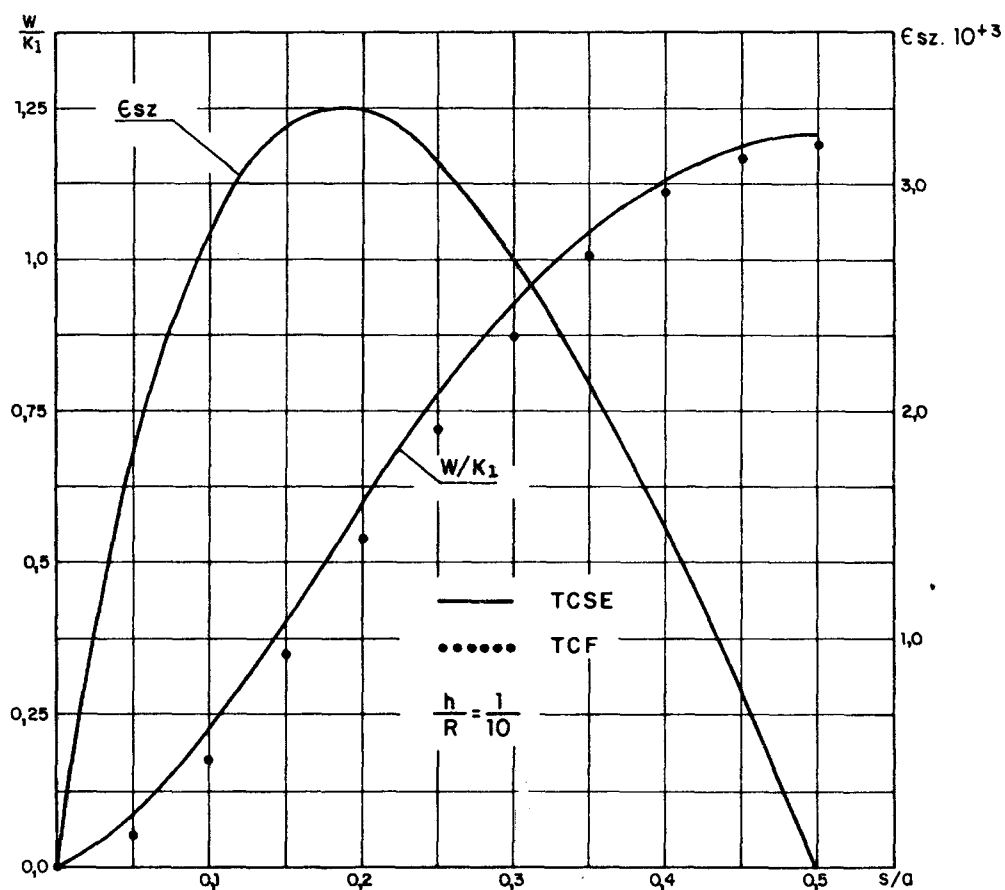


(b)

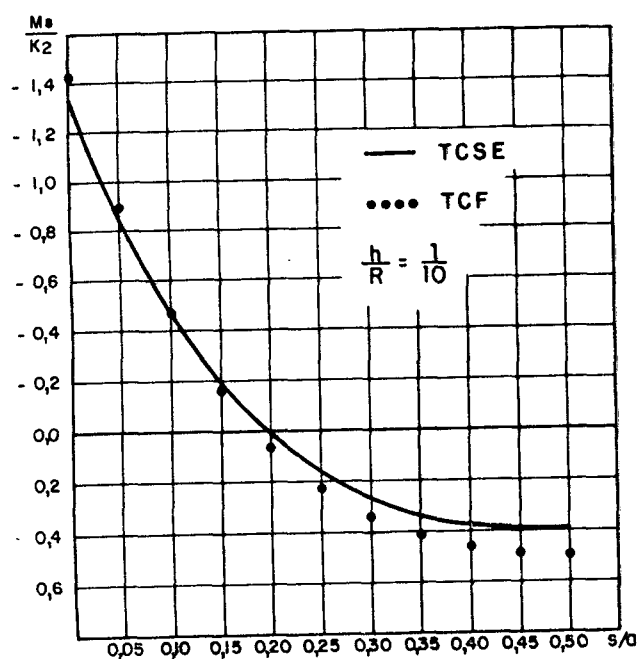


(c)

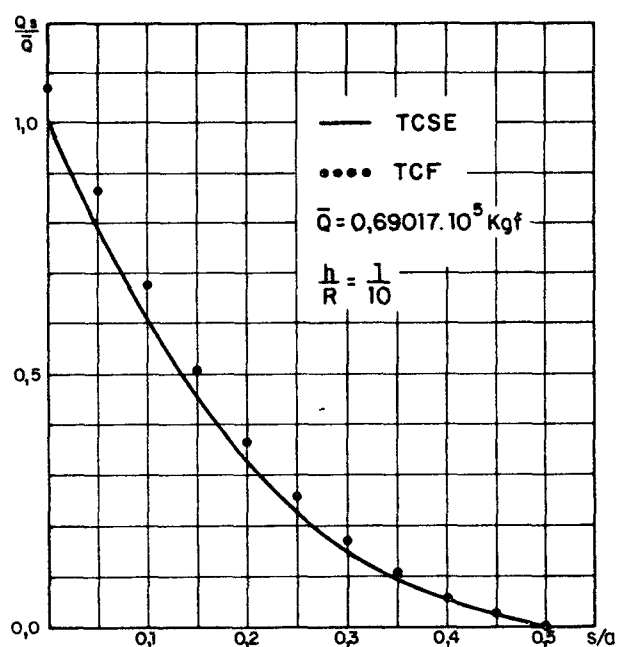
Figura 12 - a) Deslocamento radial w e deformação cisalhante ϵ_{sz} ;
 b) Momento fletor na direção s ;
 c) Esforço cortante na direção s .



(a)

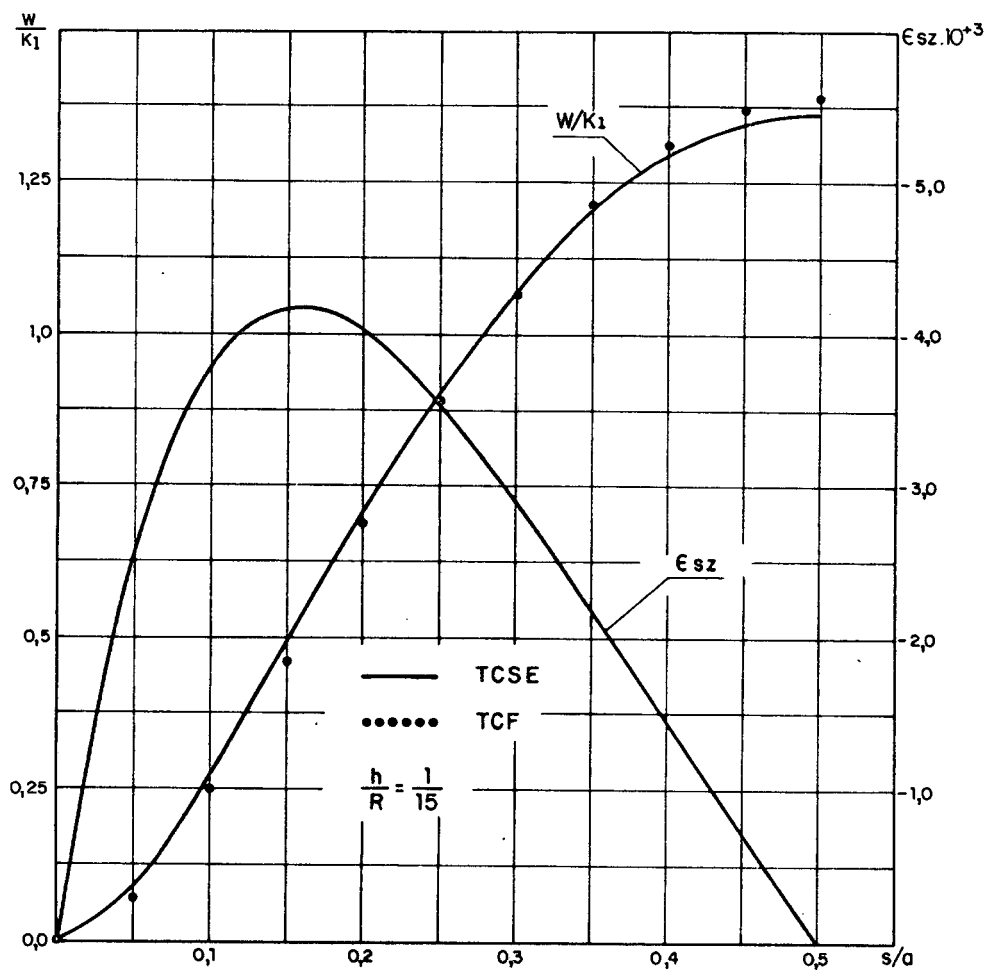


(b)

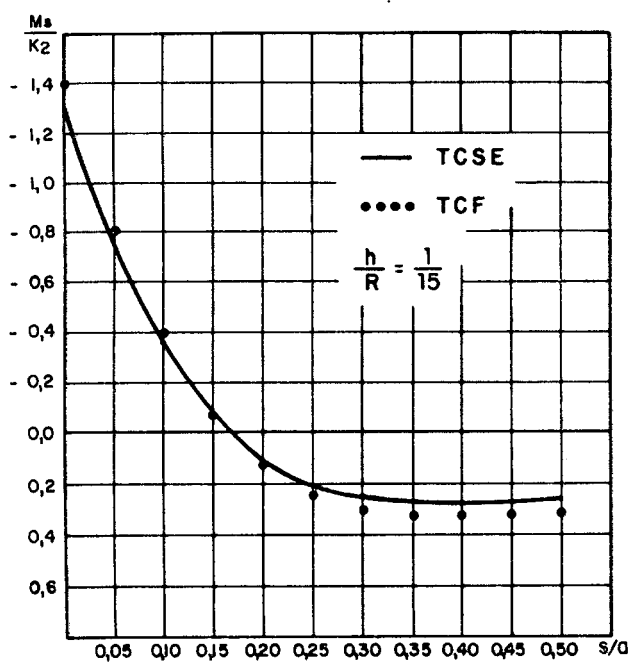


(c)

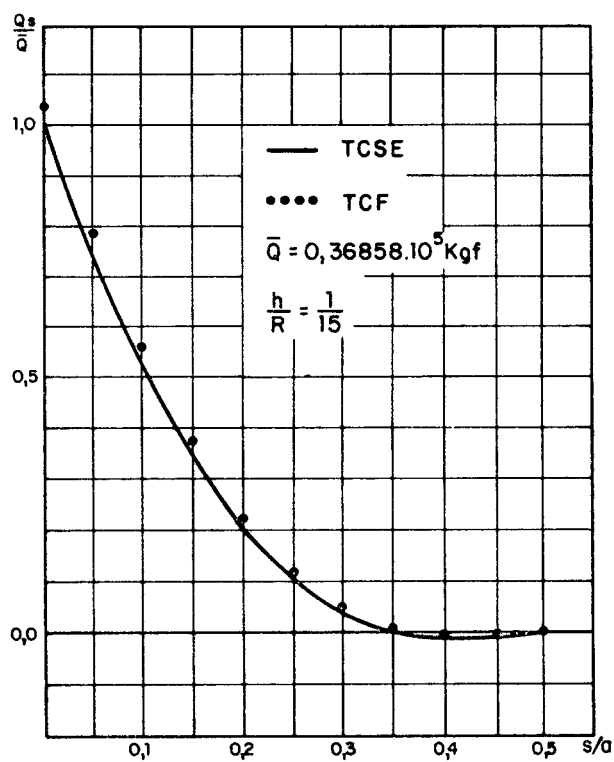
Figura 13 - a) Deslocamento radial w e deformação cisalhante ϵ_{sz} ;
 b) Momento fletor na direção s ;
 c) Esforço cortante na direção s .



(a)

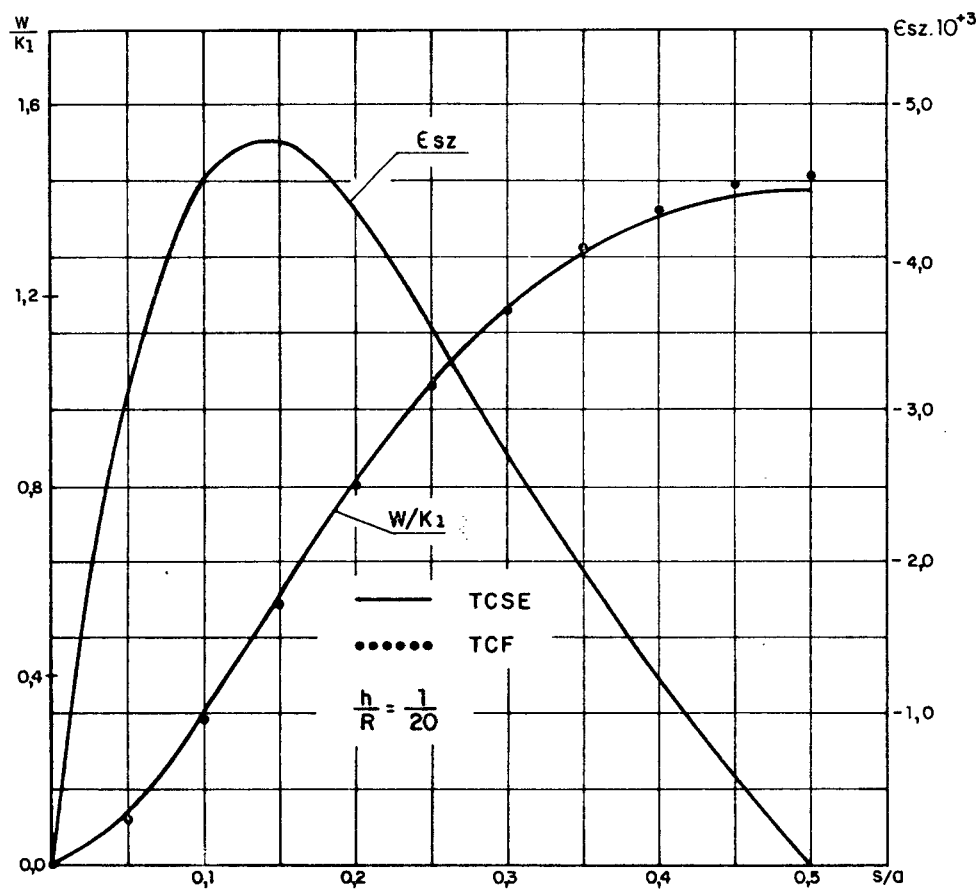


(b)

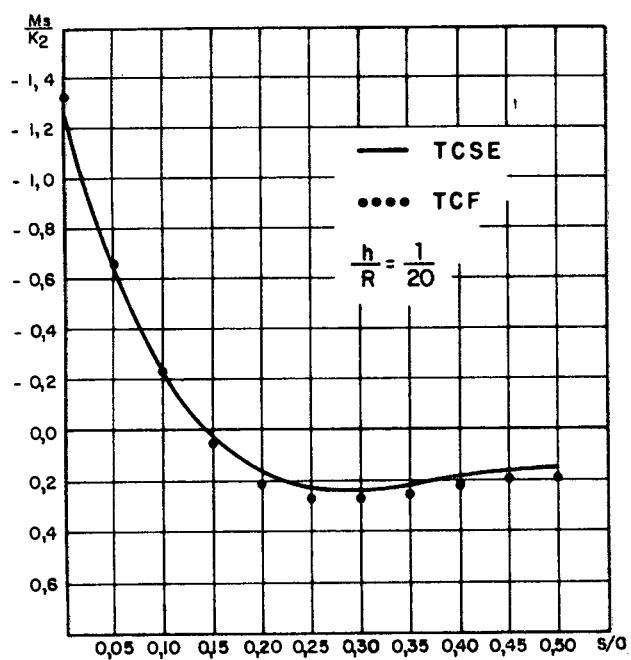


(c)

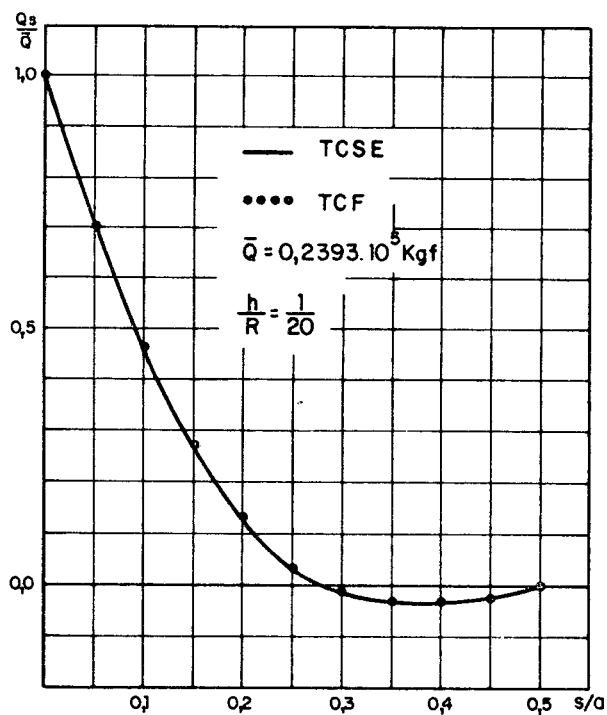
Figura 14 - a) Deslocamento radial w e deformação cisalhante ϵ_{sz} ;
 b) Momento fletor na direção s ;
 c) Esforço cortante na direção s .



(a)



(b)



(c)

Figura 15 - a) Deslocamento radial w e deformação cisalhante ϵ_{sz} ;
 b) Momento fletor na direção s ;
 c) Esforço cortante na direção s .

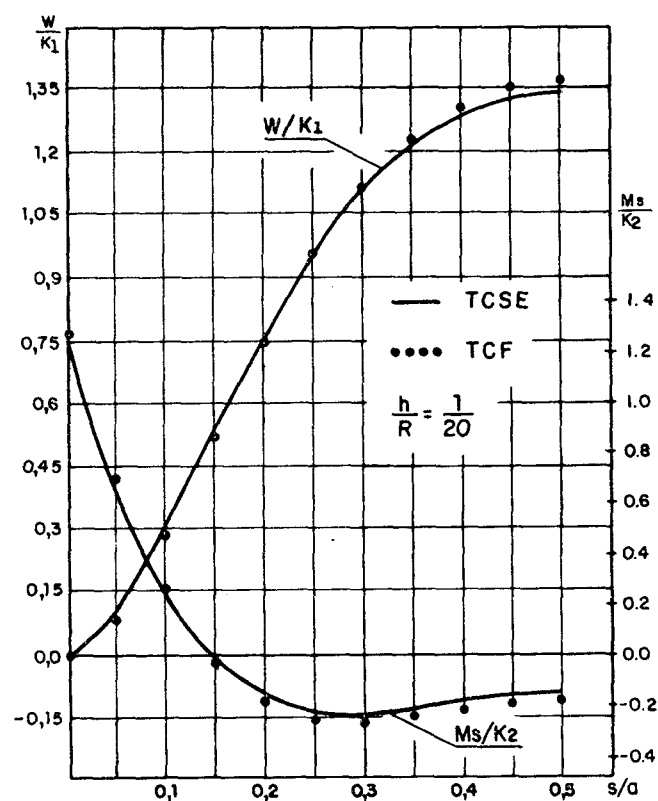
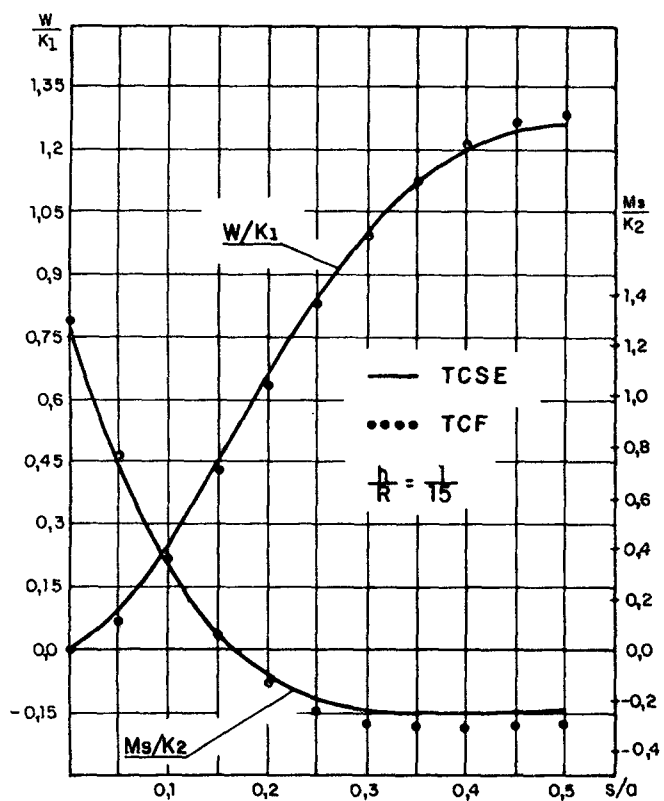
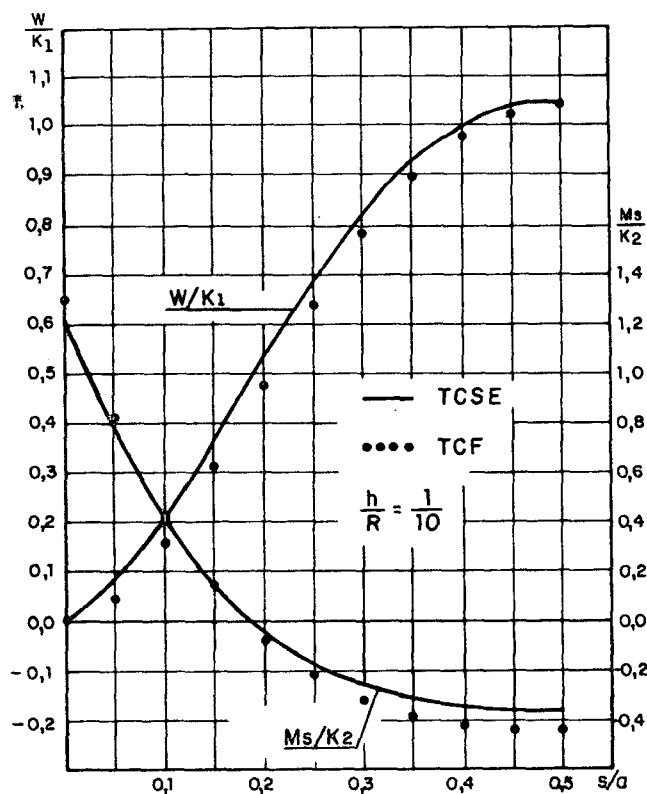
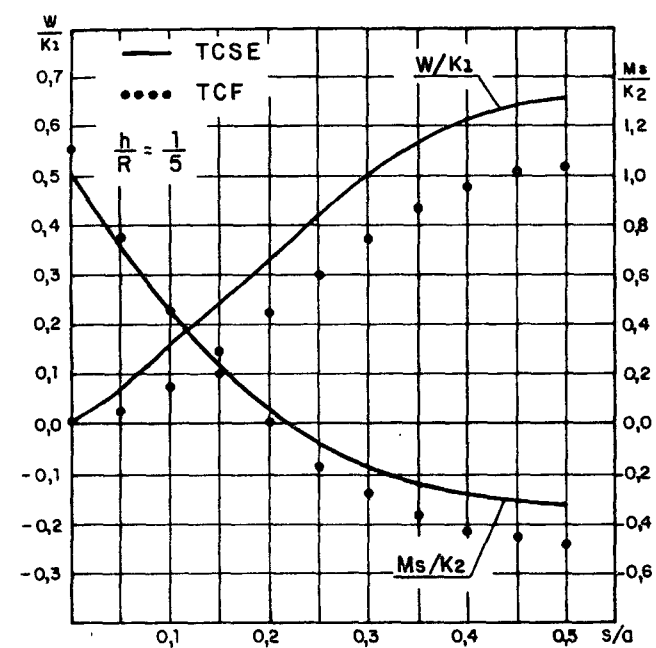


Figura 16 - Comportamento do momento fletor na direção s e deslocamento radial w , da casca cilíndrica sob o efeito de temperatura, $n=1$.

peças a deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} tem seu ponto de máximo para uma relação s/a maior do que quando a casca é fina. Verifica-se, ainda, que a deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} , a partir do ponto de máximo, decresce mais rapidamente quando a casca é fina. Desta forma, nas cascas finas o deslocamento radial w é mais amortecido pela deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} do que nas cascas espessas, e este amortecimento faz com que o deslocamento radial w , a partir de uma certa relação s/a , seja menor na TCSE do que na TCF, onde ϵ_{sz} é considerado inexistente.

3.3.2. Com distribuição cossenoidal de temperatura ao longo da coordenada circunferencial θ , $n = 1$.

Neste exemplo são apresentados o comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w , sobre a casca e para relações $h/R = 1/5, 1/10, 1/15$ e $1/20$. Estes resultados são apresentados na figura 16. Observa-se que o comportamento do momento fletor e do deslocamento w é similar ao exemplo 3.3.1, embora o carregamento tenha mudado. Neste exemplo observa-se também a influência da deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} sobre o comportamento do deslocamento radial w , pois para as relações $h/R = 1/15$ e $1/20$ observa-se o mesmo comportamento do exemplo anterior.

3.4. Casca cônica, engastada-livre

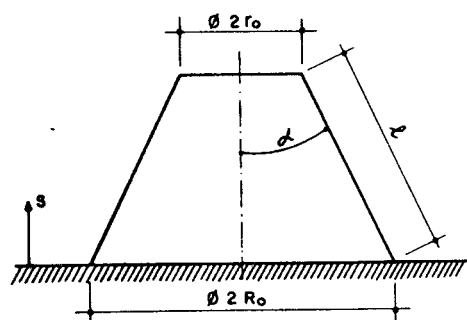


Figura 17

Dados: $E_s = E_\theta = E_z = 2,1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ $\nu = 0,3$
 $\alpha_{ts} = \alpha_{t\theta} = 1 \text{ } 1/^\circ\text{C}$ $R_0 = 50 \text{ cm}$ $\ell = 50 \text{ cm}$
 $T_1 = T_2 = 0^\circ\text{C}$
 $a = 50 \text{ cm}$

$$\sigma_0 = 2000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E_0 = 2,1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$$

$$T_0 = 1^\circ\text{C}$$

Espaçamento pivotal adimensionalizado em relação ao comprimento de referência $\Delta = 0,005$

Nº de pontos pivotaís = 201.

As cascas cônicas apresentam as seguintes características:

ℓ = comprimento do meridiano;

R_0 = raio da base (engastamento);

r_0 = raio de topo (parte livre);

α = ângulo de inclinação do meridiano em relação a linha que une os centros dos círculos da base e do topo.

Para prescrever as condições de contorno que regem o problema, pode-se determinar as condições de contorno de polo, ou escolher uma geometria adequada. Optou-se, neste problema, em escolher uma geometria adequada. Para isto, construiu-se uma casca com abertura no topo de raio r_0 , tal que se pudesse prescrever as condições de contorno livre.

Assim procedendo, resolveu-se alguns problemas fazendo com que o ângulo α assumisse vários valores. Nestes vários valores de α manteve-se R_0 (raio da base) e ℓ (comprimento do meridiano) constantes. Com isto, o raio r_0 (raio do topo) tornou-se uma função do ângulo α . Neste trabalho analisam-se cascas cônicas com ângulos $\alpha = 45^\circ$, 30° e 15° .

Além disso, em cada caso foram aplicados dois tipos de carregamentos, um dos quais com pressão interna uniformemente distribuída na direção circunferencial ($n = 0$) e outro em que a pressão tem uma distribuição cossenoidal ($n = 1$).

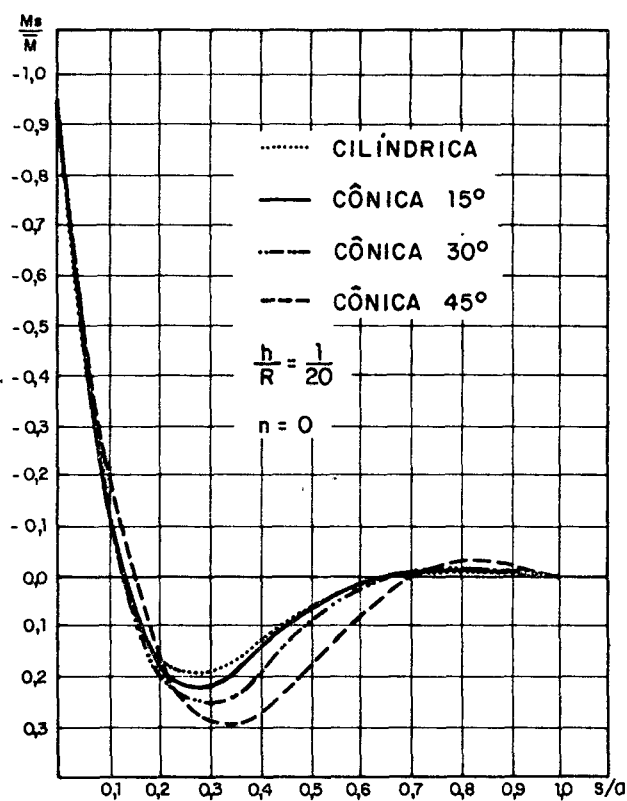
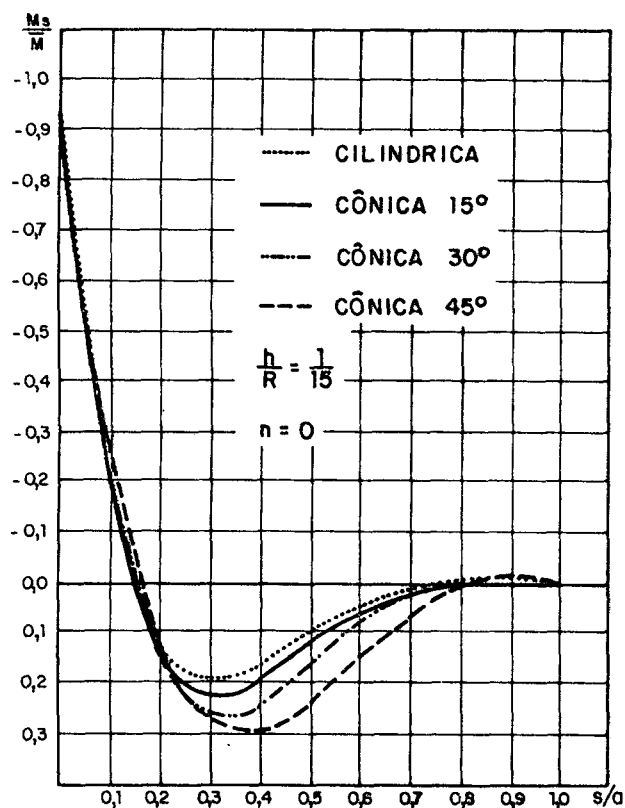
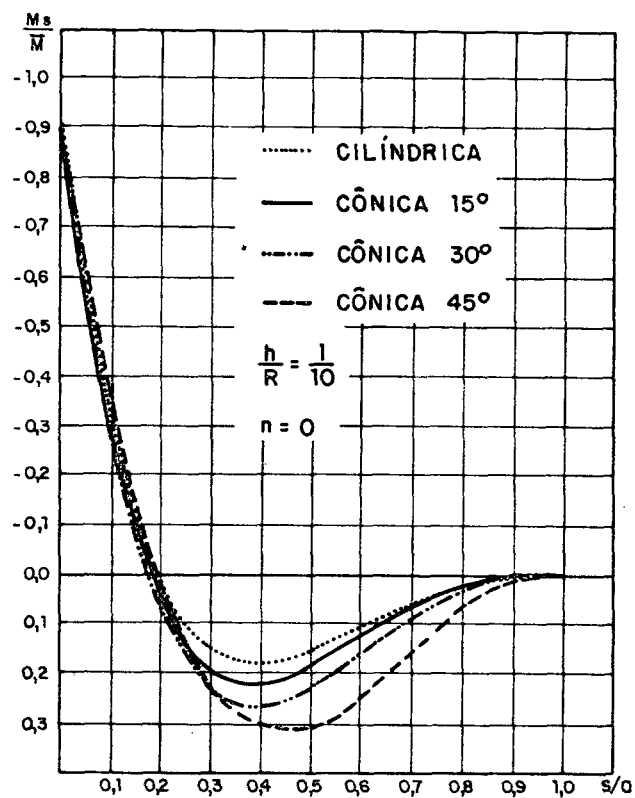
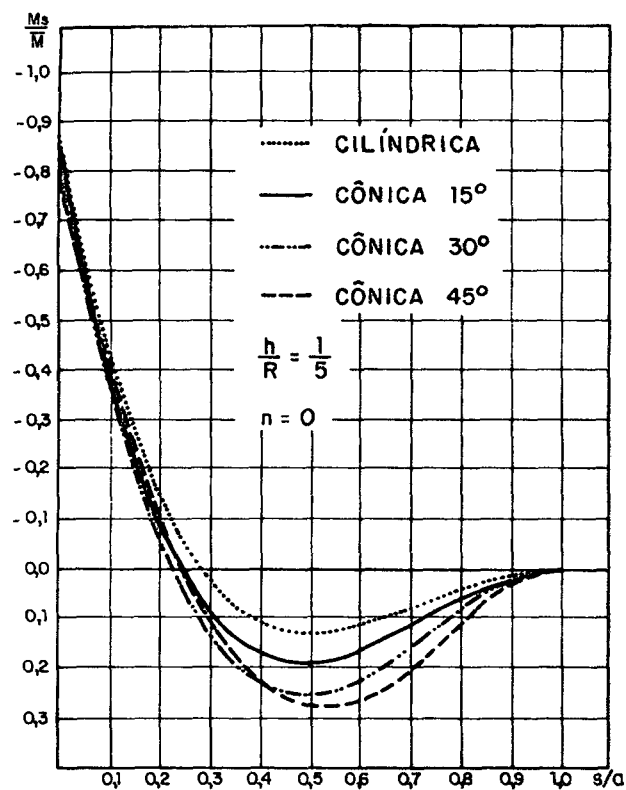


Figura 18 - Momento fletor na direção s , ao longo das cascas cônicas 45°, 30°, 15° e casca cilíndrica, sujeitas a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ e para diferentes espessuras.

3.4.1. Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ uniformemente distribuída na direção circunferencial, $n=0$.

Verifica-se que a solução da casca cônica converge para a solução de uma casca cilíndrica à medida que o ângulo α tende a 0° (zero graus). Isto pode ser visualizado graficamente através da figura 18, onde estão plotados o comportamento do momento fletor na direção s , sobre a casca, obtidos através da TCSE, para as relações $h/R = 1/5, 1/10$ e $1/20$, e para os ângulos $\alpha = 45^\circ, 30^\circ, 15^\circ$ e casca cilíndrica.

\bar{M} na figura 18 correspondem ao momento fletor no engastamento determinados pela TCF, para cada caso. Seus valores estão dados na Tabela 3.3.

TABELA 3.3.

VALORES DE \bar{M} DA FIGURA 18				
h/R	45°	30°	15°	0°
1/5	158,90	132,76	129,75	147,76
1/10	93,852	73,832	68,958	75,649
1/15	66,806	51,095	46,810	50,461
1/20	52,018	39,174	35,484	37,874

3.4.1.a. Casca cônica $\alpha = 45^\circ$

Neste exemplo as comparações entre as TCSE e TCF são apresentadas em duas formas:

- 1) Comportamento do momento fletor (M_s), na direção s do deslocamento radial W , ao longo da casca;
- 2) Valores do momento fletor (M_s), na direção s no engastamento.

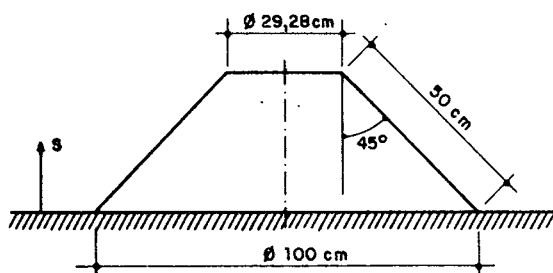


Figura 19

No primeiro caso constata-se a convergência dos valores do momento fletor M_s , obtidos pela TCSE para a solução obtida pela TCF, ao longo da casca. Observa-se, também, a influência das deformações cisalhantes transversais, sobre os valores do momento fletor M_s e sobre o comportamento do deslocamento radial w , ao longo da casca.

No segundo caso, mostra-se a convergência dos valores do momento fletor M_s no engastamento, obtidos pela TCSE, para os valores obtidos pela TCF, em função da relação h/R .

1) Comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w , ao longo da casca.

Na figura 20 visualiza-se o comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w e ambos são adimensionalizados através das constantes indicadas nos gráficos. Vê-se que o comportamento do momento fletor e do deslocamento radial é o mesmo daquele descrito anteriormente, nos itens 3.2 e 3.3, onde se observa a influência da deformação cisalhante ϵ_{sz} . Além disso, observa-se a convergência do momento fletor e do deslocamento radial obtidos pela TCSE para a solução obtida pela TCF, a medida que a relação h/R diminua.

2) Valores do momento fletor na direção s no engastamento

Os valores do momento fletor na direção s no engastamento são apresentados na tabela 3.4 em função da relação h/R , que varia de $1/5$ até $1/50$.

Verifica-se, neste exemplo, uma convergência nos valores do momento fletor na direção s , obtidos pelas duas teorias. A diferença percentual entre estes valores se aproxima até a relação $h/R = 1/38$ e no valor subsequente a diferença percentual aumenta, embora a diferença absoluta entre estes valores tenha diminuído. As causas deste comportamento foram levantadas no item 3.2.1. Estes resultados são mostrados graficamente na figura 21, para relações h/R de $1/5$ a $1/40$.

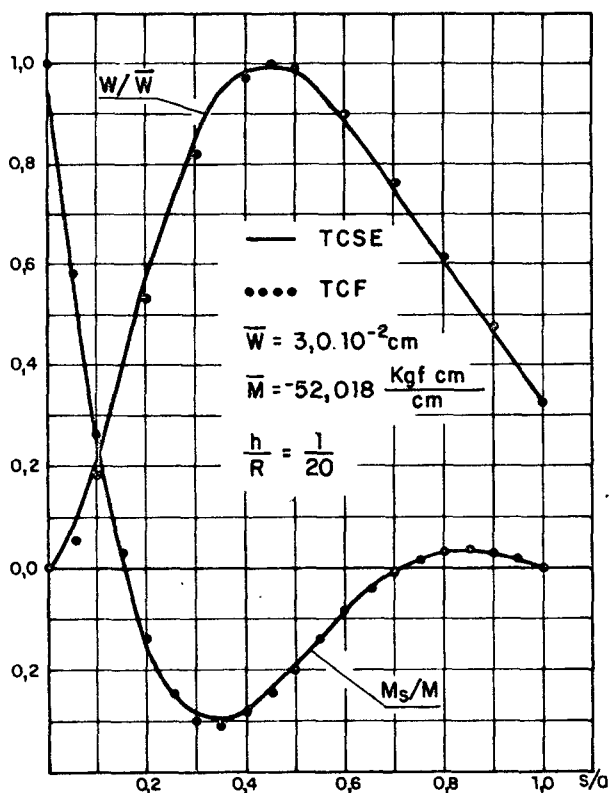
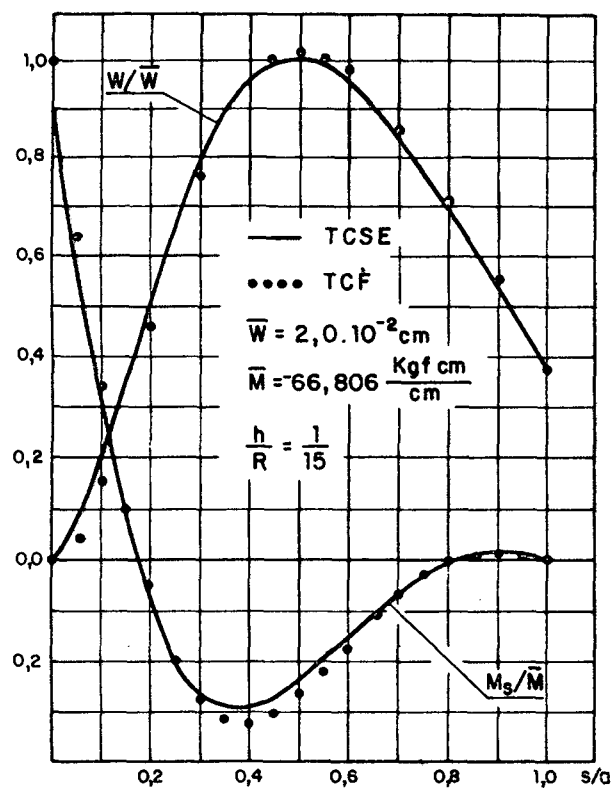
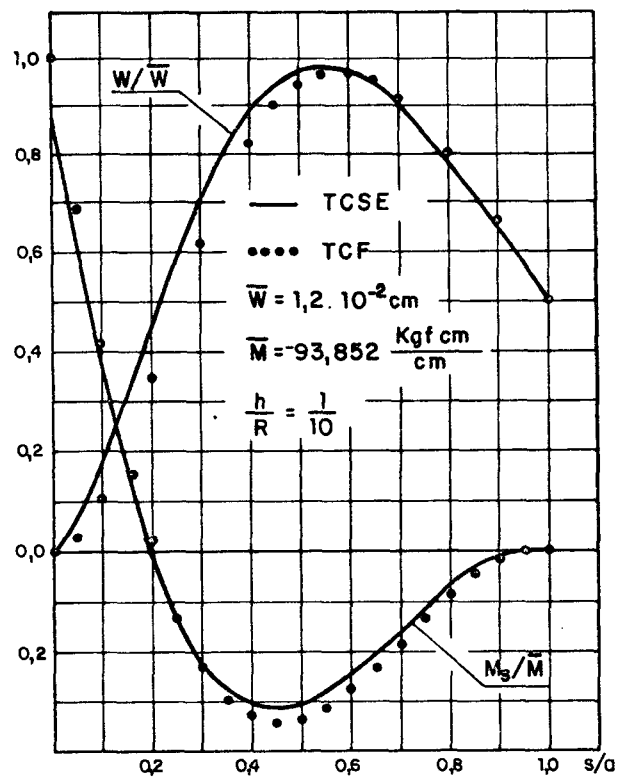
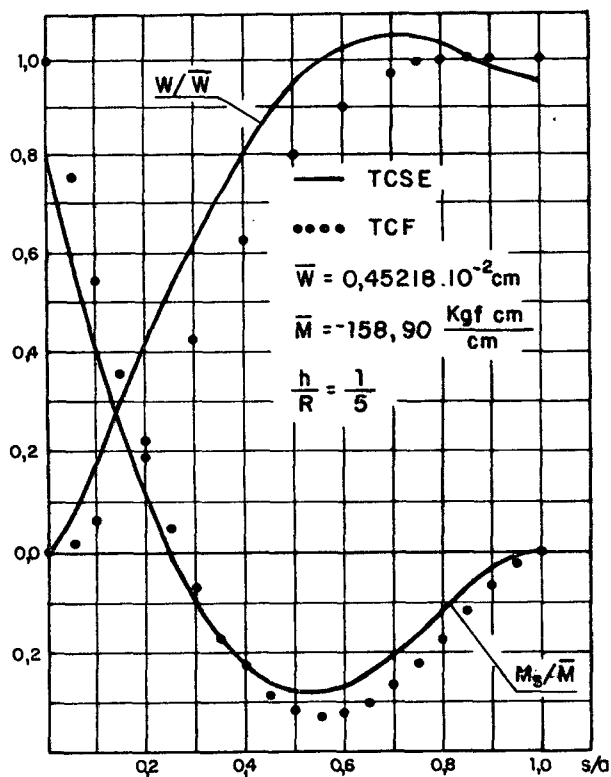


Figura 20 - Momento fletor na direção s e deslocamento radial w ao longo da casca, cônica 45° , sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ Kgf/cm}^2$, para diferentes espessuras e $n=0$.

TABELA 3.4

CASCA CÔNICA $\alpha = 45^\circ$ $n = 0$				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 158,90	- 126,52	32,38	20,37
1/6	- 139,15	- 114,82	24,33	17,48
1/7	- 124,08	- 105,13	18,95	15,29
1/8	- 112,04	- 96,768	15,26	13,63
1/9	- 102,15	- 89,663	12,49	12,22
1/10	- 93,852	- 83,420	10,432	11,12
1/11	- 86,794	- 77,957	8,837	10,18
1/12	- 80,725	- 73,148	7,577	9,39
1/13	- 75,475	- 68,872	6,613	8,75
1/14	- 70,869	- 65,057	5,811	8,20
1/15	- 66,806	- 61,536	5,270	7,89
1/16	- 63,190	- 58,462	4,728	7,48
1/17	- 59,959	- 55,794	4,164	6,95
1/18	- 57,043	- 53,271	3,772	6,61
1/19	- 54,410	- 50,852	3,558	6,54
1/20	- 52,018	- 48,712	3,306	6,36
1/22	- 47,824	- 44,961	2,863	5,99
1/24	- 44,266	- 41,726	2,540	5,74
1/26	- 41,220	- 38,971	2,249	5,46
1/28	- 38,569	- 36,564	2,005	5,20
1/30	- 36,243	- 34,393	1,850	5,10
1/32	- 34,190	- 32,489	1,701	4,98
1/34	- 32,355	- 30,757	1,698	4,94
1/36	- 30,720	- 29,234	1,486	4,84
1/38	- 29,241	- 27,884	1,357	4,64
1/40	- 27,900	- 26,591	1,309	4,69
1/45	- 25,039	- 23,870	1,169	4,67
1/50	- 22,717	- 21,632	1,085	4,78

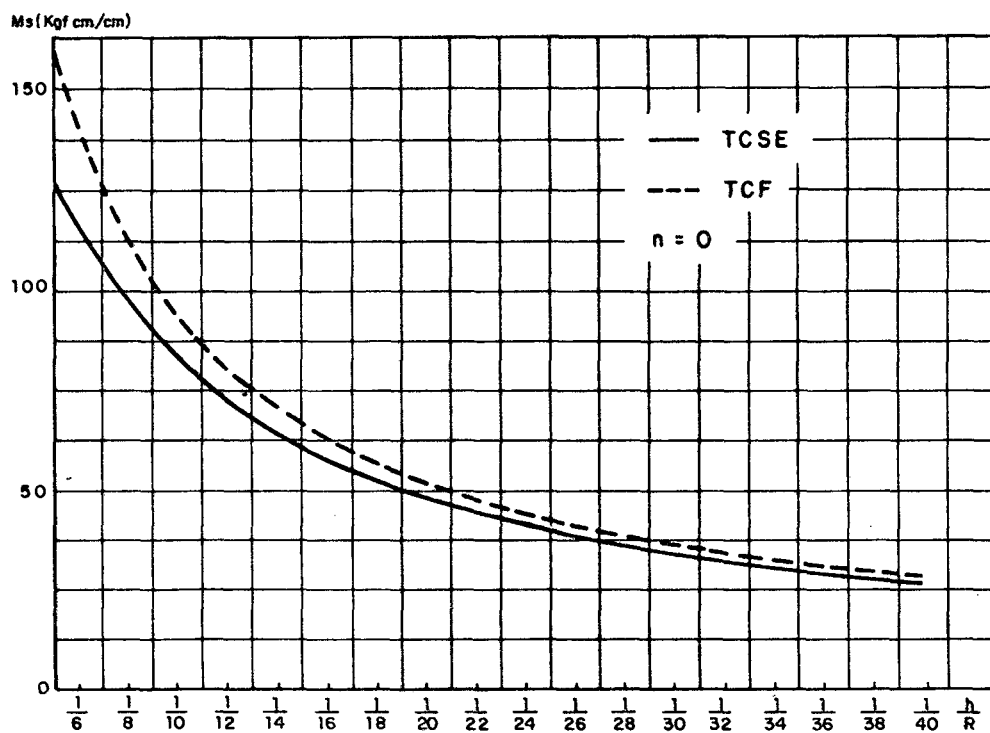


Figura 21 - Momento fletor na direção s no engastamento da casca cônica 45° , sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

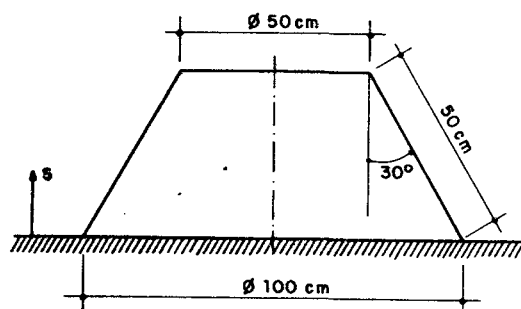
3.4.1.b. Casca cônica $\alpha = 30^\circ$ 

Figura 22

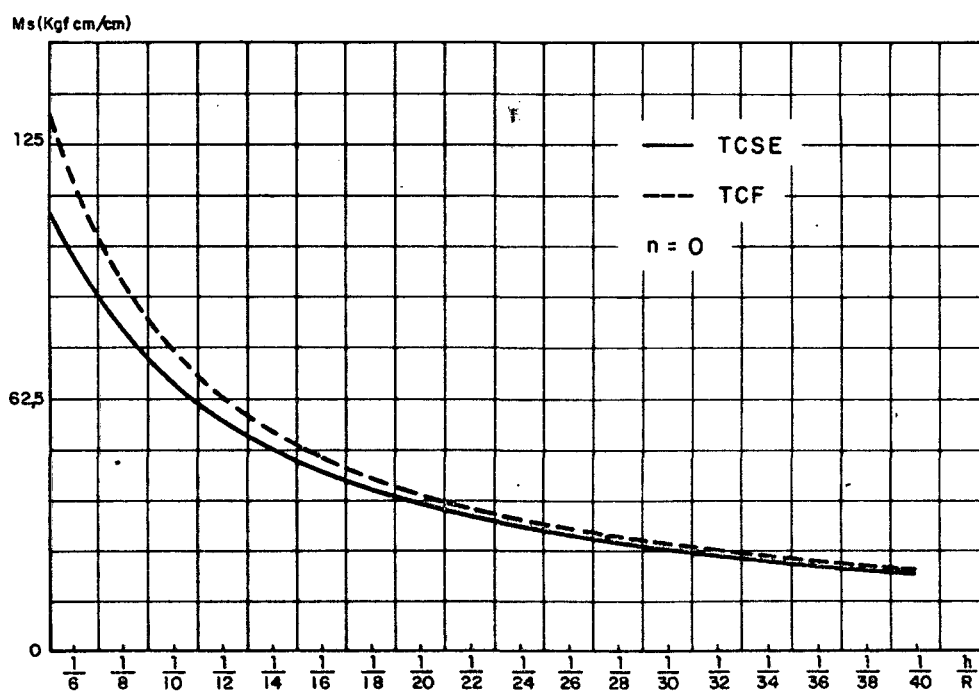


Figura 23 - Momento fletor na direção s no engastamento da casca cônica 30° , sujeita a uma pressão interna de 1 kgf/cm^2 .

TABELA 3.5

CASCA CÔNICA $\alpha = 30^\circ$ $n = 0$				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	C T F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 132,76	- 108,47	24,23	18,30
1/6	- 114,56	- 96,530	18,03	15,74
1/7	- 100,75	- 86,854	13,90	13,79
1/8	- 89,859	- 78,811	11,048	12,29
1/9	- 81,083	- 72,086	8,997	11,10
1/10	- 73,832	- 66,382	7,450	10,09
1/11	- 67,774	- 61,506	6,266	9,25
1/12	- 62,648	- 57,182	5,466	9,72
1/13	- 58,246	- 53,576	4,670	8,02
1/14	- 54,435	- 50,343	4,092	7,54
1/15	- 51,095	- 47,465	3,630	7,10
1/16	- 48,156	- 44,785	3,371	7,00
1/17	- 45,537	- 42,560	2,977	6,54
1/18	- 43,195	- 40,492	2,703	6,26
1/19	- 41,085	- 38,569	2,516	6,12
1/20	- 39,174	- 36,815	2,359	6,02
1/22	- 35,851	- 33,765	2,086	5,82
1/24	- 33,053	- 31,201	1,852	5,60
1/26	- 30,665	- 28,989	1,676	5,47
1/28	- 28,604	- 27,075	1,529	5,35
1/30	- 26,806	- 25,411	1,395	5,20
1/32	- 25,223	- 23,928	1,295	5,14
1/34	- 23,818	- 22,594	1,224	5,14
1/36	- 22,563	- 21,416	1,147	5,08
1/38	- 21,436	- 20,342	1,094	5,21
1/40	- 20,417	- 19,359	1,058	5,18
1/45	- 18,253	- 17,286	0,967	5,30
1/50	- 16,503	- 15,592	0,911	5,52

Neste caso, apresenta-se os valores do momento fletor na direção s no engastamento em função da relação h/R . Estes valores são apresentados na tabela 3.5.

Observa-se que a convergência nos resultados na diferença percentual ocorre até a relação h/R igual a $1/36$. Da mesma forma que no exemplo de $\alpha = 45^\circ$, a partir desta relação h/R , a diferença percentual aumenta, mas a diferença absoluta entre os valores continua diminuindo até a relação $h/R = 1/50$. Os valores da Tabela 3.5 são mostrados graficamente através da figura 23.

3.4.1.c. Casca cônica $\alpha = 15^\circ$

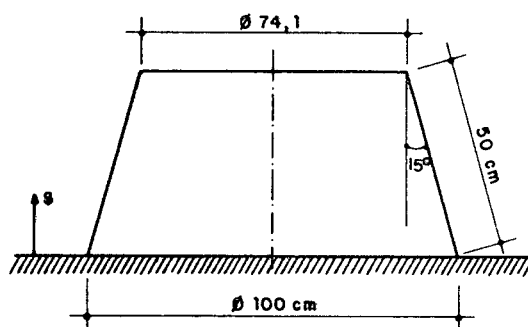


Figura 24

Neste exemplo também se apresenta os valores do momento fletor na direção s no engastamento em função de h/R , que estão descritos na tabela 3.6.

A convergência nos valores da diferença percentual acontece até a relação $h/R = 1/30$, e a partir desta relação os resultados começam a divergir. Contudo, verifica-se que a diferença absoluta entre os valores continuam diminuindo até a relação $h/R=1/50$. Estes resultados estão descritos graficamente na figura 25.

TABELA 3. 6

CASCA CÔNICA $\alpha = 15^\circ$ $n = 0$				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 129,75	- 109,29	20,46	15,77
1/6	- 110,48	- 95,302	15,18	13,74
1/7	- 96,130	- 84,463	11,667	12,14
1/8	- 85,030	- 75,788	9,242	10,87
1/9	- 76,171	- 68,650	7,521	9,87
1/10	- 68,958	- 62,742	6,216	9,01
1/11	- 62,991	- 57,764	5,227	8,30
1/12	- 57,971	- 53,470	4,501	7,76
1/13	- 53,690	- 49,793	3,897	7,26
1/14	- 50,015	- 46,531	3,484	6,97
1/15	- 46,810	- 43,689	3,121	6,67
1/16	- 43,992	- 41,156	2,836	6,45
1/17	- 41,500	- 38,923	2,577	6,21
1/18	- 39,276	- 36,910	2,366	6,02
1/19	- 37,284	- 35,100	2,184	5,86
1/20	- 35,484	- 33,441	2,043	5,76
1/22	- 32,364	- 30,622	1,742	5,38
1/24	- 29,750	- 28,186	1,564	5,26
1/26	- 27,531	- 26,117	1,414	5,14
1/28	- 25,621	- 24,342	1,279	4,99
1/30	- 23,962	- 22,766	1,296	4,99
1/32	- 22,505	- 21,380	1,125	5,00
1/34	- 21,217	- 20,146	1,071	5,05
1/36	- 20,069	- 19,074	0,995	4,96
1/38	- 19,040	- 18,078	0,962	5,05
1/40	- 18,111	- 17,189	0,922	5,09
1/45	- 16,147	- 15,235	0,912	5,65
1/50	- 14,569	- 13,693	0,876	6,01

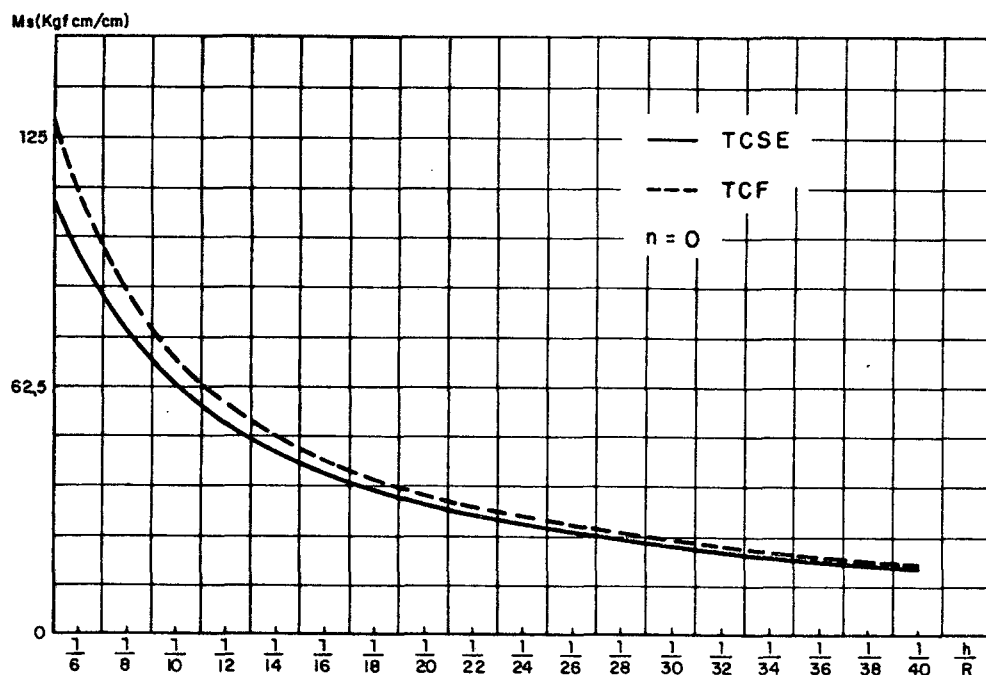


Figura 25 - Momento fletor na direção s no engastamento da casca cônica 15° , sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

3.4.2. Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n=1$

Observa-se que, para este carregamento, a solução de problemas de cascas cônicas na medida que o ângulo α tende a zero (0°), ela tende para os resultados de uma casca cilíndrica. Isto pode ser visto através da Figura 26, onde apresenta-se o comportamento do momento fletor na direção s ao longo da casca, obtidos pela TCSE, para as relações $h/R = 1/5, 1/10, 1/15$ e $1/20$ e para ângulos $\alpha = 45^\circ, 30^\circ, 15^\circ$ e casca cilíndrica.

\bar{M} da Figura 26 correspondem ao momento fletor no engastamento determinados pela TCF, para cada caso. Seus valores estão dados na Tabela 3.7.

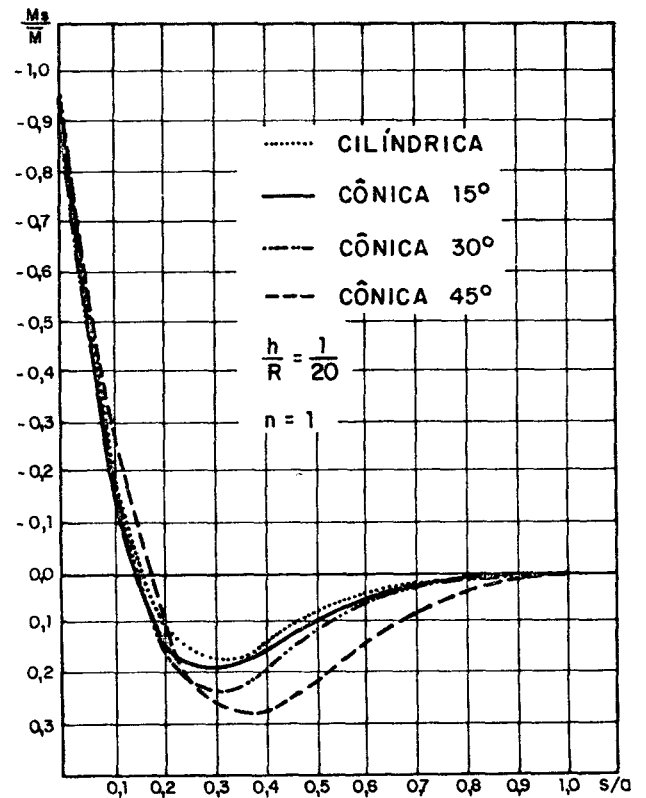
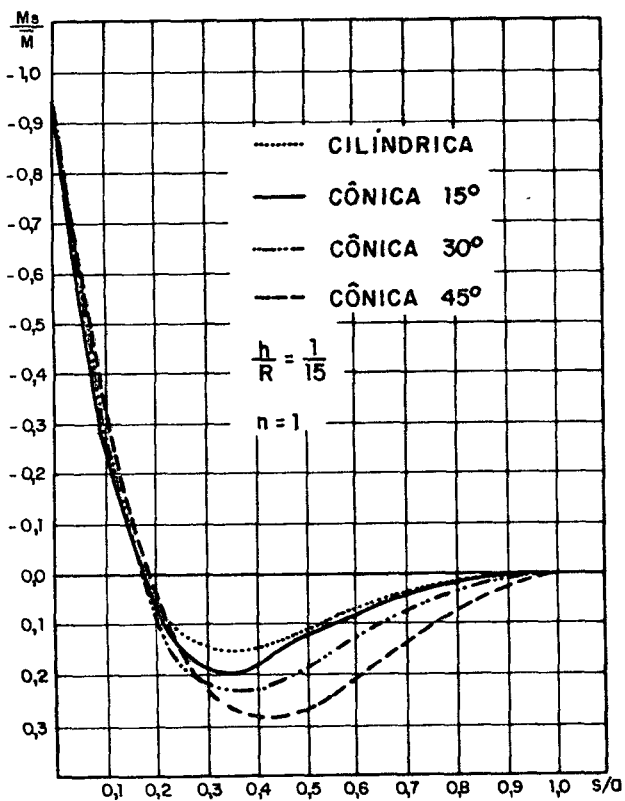
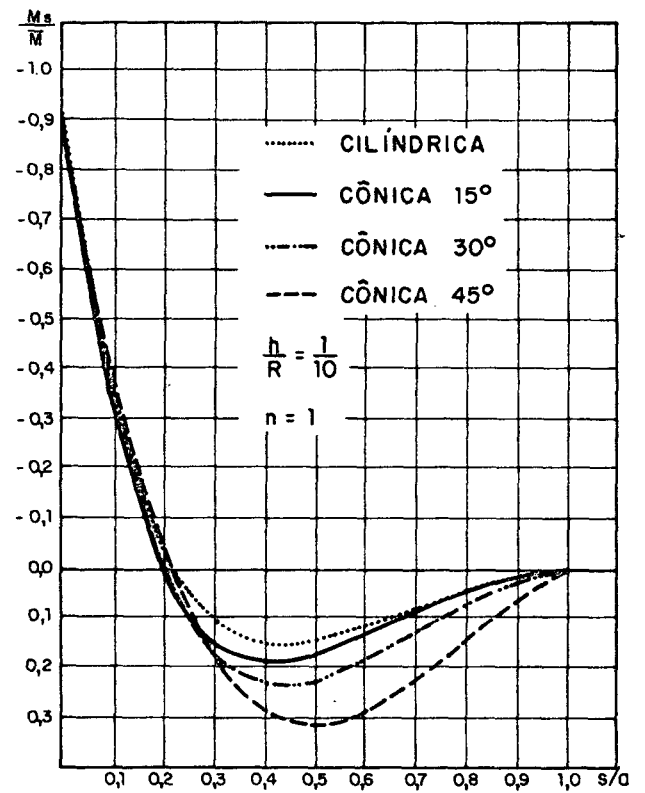
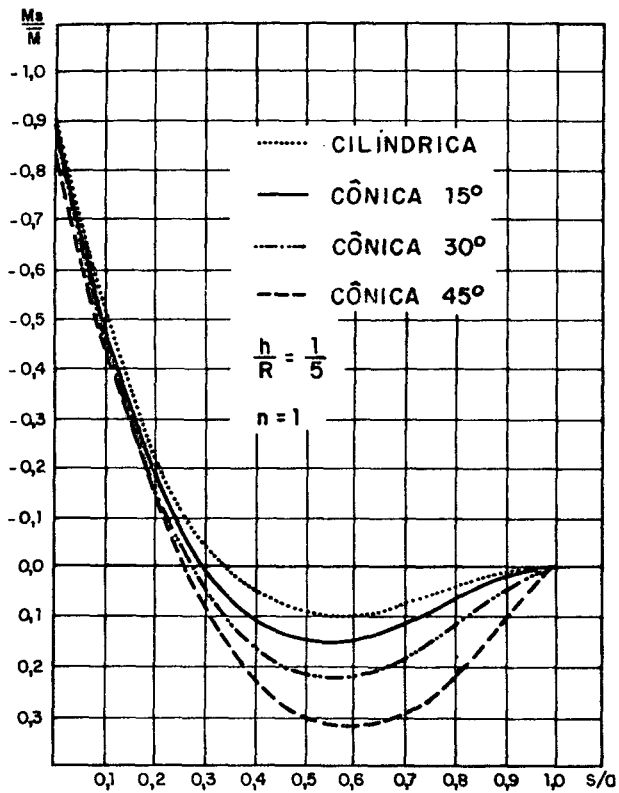


Figura 26 - Momento fletor na direção s , ao longo das cascas cônicas 45°, 30°, 15° e da casca cilíndrica, sujeitas a uma pressão interna de 1 kgf/cm^2 para diferentes espessuras.

Tabela 3.7

VALORES DE \bar{M} DA FIGURA 26				
h/R	45°	30°	15°	0°
1/5	196,28	186,14	196,13	233,33
1/10	120,34	101,94	101,02	116,14
1/15	85,728	69,297	66,819	75,321
1/20	66,308	52,280	49,645	55,391

3.4.2.a. Casca cônica $\alpha = 45^\circ$

Neste exemplo, também, apresenta-se o comportamento do momento fletor (M_s), na direção s, do momento radial W ao longo da casca, e os valores do momento fletor M_s no engastamento em função da relação h/R. Como anteriormente, nos dois casos tem-se o intuito de demonstrar a convergência da solução obtida pela TCSE para a solução obtida pela TCF.

1) Comportamento do momento fletor na direção s do deslocamento radial w

Na figura 27 tem-se o comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w, na qual verifica-se a tendência da solução obtida pela TCSE para a solução obtida pela TCF, à medida que a espessura da casca diminui. Ainda observa-se, no deslocamento radial, a influência das deformações cisalhantes transversais.

2) Valores do momento fletor na direção s no engastamento

Estes valores são apresentados na Tabela 3.8 e descritos graficamente na figura 28.

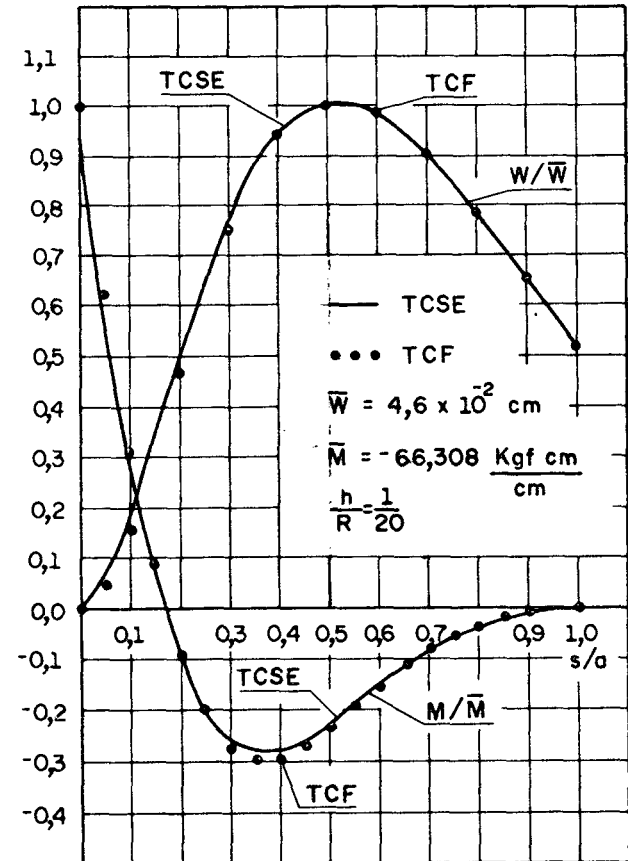
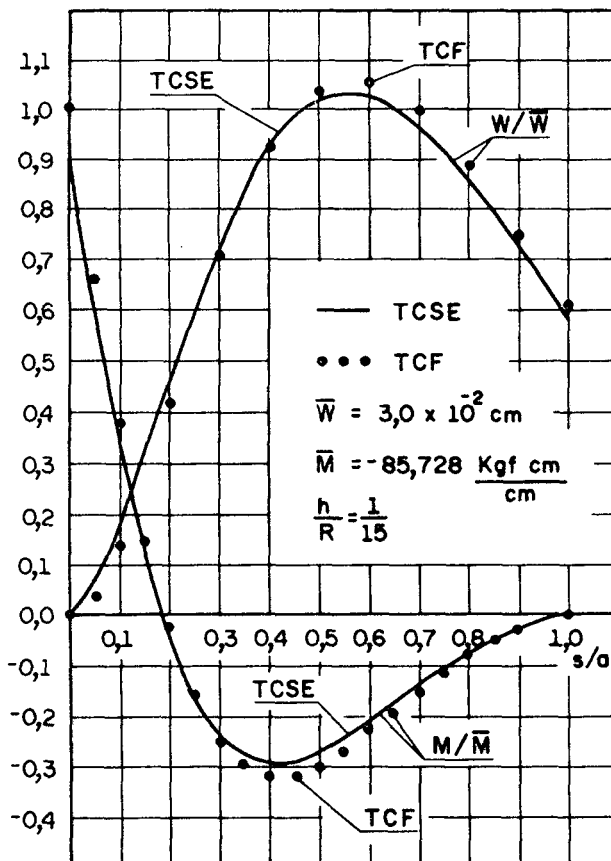
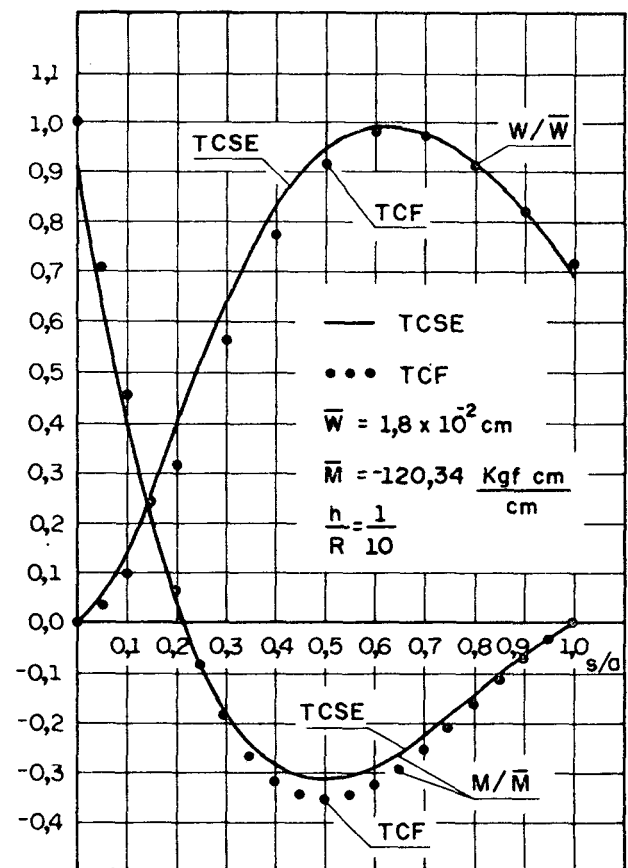
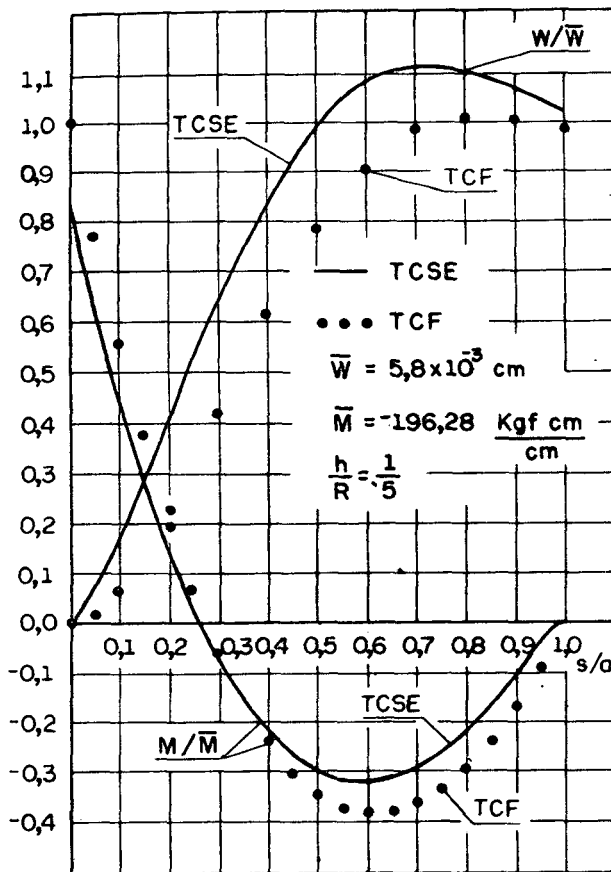


Figura 27 - Momento fletor na direção s e deslocamento radial w , ao longo da casca cônica 45° , sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$

TABELA 3.8.

CASCA CÔNICA $\alpha = 45^\circ$ $n = 1$				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 196,28	- 163,86	32,42	16,51
1/6	- 174,79	- 149,99	24,80	14,19
1/7	- 157,29	- 137,35	19,94	12,68
1/8	- 142,84	- 126,42	16,42	11,50
1/9	- 130,69	- 117,13	13,56	10,38
1/10	- 120,34	- 108,84	11,50	9,56
1/11	- 111,45	- 101,57	9,88	8,86
1/12	- 103,71	- 95,396	8,31	8,02
1/13	- 96,972	- 89,390	7,582	7,82
1/14	- 91,015	- 84,276	6,739	7,40
1/15	- 85,728	- 79,675	6,053	7,06
1/16	- 80,996	- 75,804	5,192	6,41
1/17	- 76,753	- 71,787	4,966	6,47
1/18	- 72,925	- 68,621	4,304	5,90
1/19	- 69,465	- 65,326	4,139	5,96
1/20	- 66,308	- 62,153	4,155	6,27
1/22	- 60,770	- 57,297	3,473	5,71
1/24	- 56,072	- 52,784	3,288	5,86
1/26	- 52,063	- 49,059	3,004	5,77
1/28	- 48,575	- 45,874	2,701	5,56
1/30	- 45,525	- 43,188	2,337	5,13
1/32	- 42,835	- 40,650	2,185	5,13
1/34	- 40,434	- 38,426	2,008	4,97
1/36	- 38,305	- 36,282	2,023	5,28
1/38	- 36,379	- 34,596	1,783	4,90
1/40	- 34,639	- 32,834	1,805	5,21
1/45	- 30,935	- 29,402	1,533	4,96
1/50	- 27,945	- 26,473	1,472	5,27

Observa-se convergência na diferença percentual entre os resultados obtidos pela TCSE e TCF até a relação $h/R = 1/22$. Contudo, verifica-se que a diferença absoluta entre os resultados das duas teorias diminuem até a relação $1/50$. Nota-se, em relação ao exemplo 3.3.1.a, que o limite de convergência na diferença percentual h/R é diferente e é explicado pela mudança de carregamento.

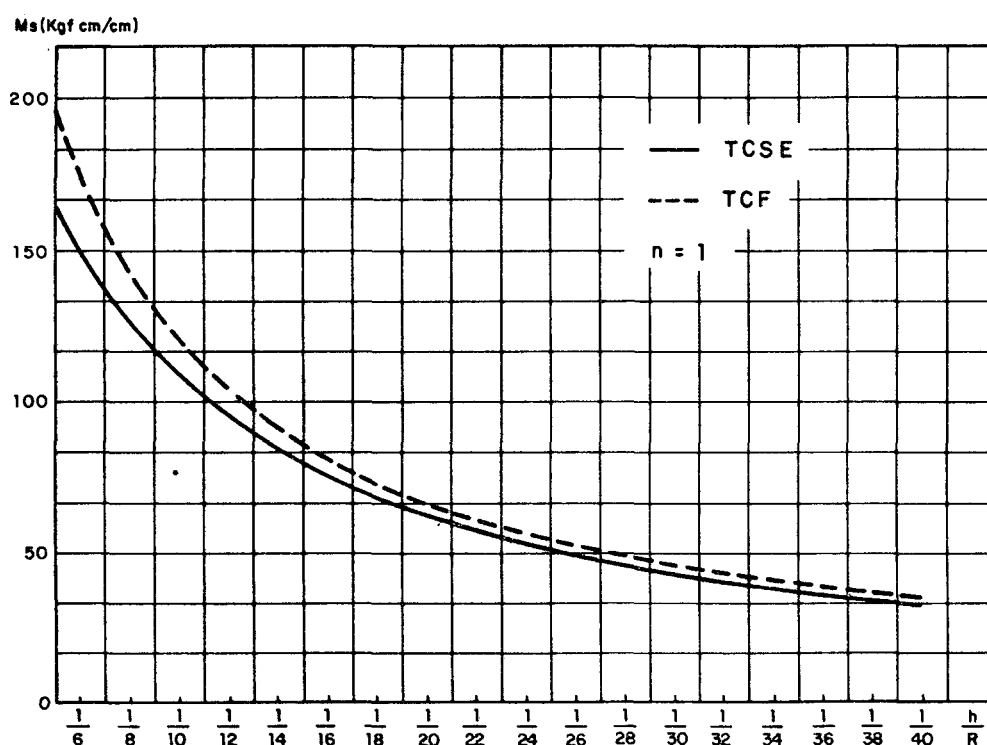


Figura 28 - Momento fletor na direção s e no engastamento da casca cônica 45° , sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

3.4.2.b. Casca cônica $\alpha = 30^\circ$

São apresentados os valores do momento fletor na direção s no engastamento em função da relação h/R , que são descritos na tabela 3.9.

Verifica-se que a convergência na diferença percentual entre as duas teorias ocorre até a relação $h/R = 1/30$, e como nos exemplos anteriores a diferença absoluta entre os valores continuam diminuindo, embora a diferença percentual aumente. Descreve-se estes resultados graficamente na figura 29.

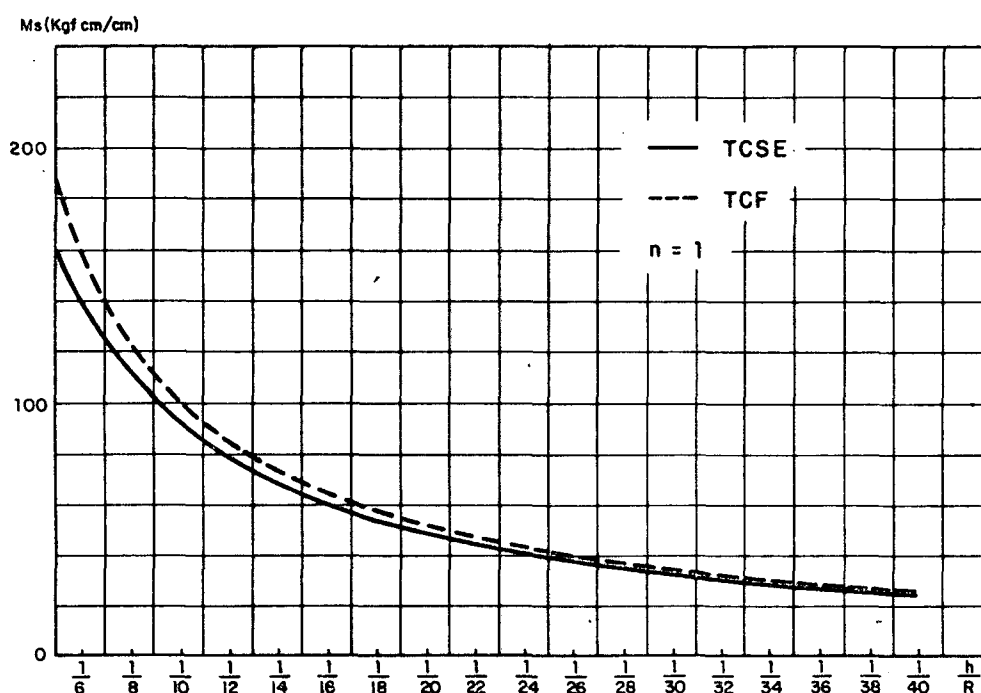


Figura 29 - Momento fletor na direção s e no engastamento da casca cônica 30° , sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

TABELA 3.9

CASCA CÔNICA $\alpha = 30^\circ$ $n = 1$				
Momento fletor na direção s no engastamento			$\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$	
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 186,14	- 159,54	26,60	14,29
1/6	- 160,13	- 140,20	19,93	12,45
1/7	- 140,41	- 124,88	15,53	11,06
1/8	- 124,87	- 112,34	12,53	10,03
1/9	- 112,34	- 102,03	10,31	9,18
1/10	- 101,94	- 93,345	8,60	9,43
1/11	- 93,259	- 85,958	7,301	7,83
1/12	- 85,893	- 79,346	6,547	7,62
1/13	- 79,571	- 74,069	5,502	6,91
1/14	- 74,076	- 69,248	4,828	6,52
1/15	- 69,297	- 65,011	4,286	6,18
1/16	- 65,080	- 60,850	4,230	6,50
1/17	- 61,333	- 57,626	3,707	6,04
1/18	- 58,001	- 54,616	3,385	5,84
1/19	- 54,893	- 51,856	3,037	5,53
1/20	- 52,280	- 49,354	2,926	5,60
1/22	- 47,583	- 44,936	2,647	5,56
1/24	- 43,648	- 41,254	2,394	5,48
1/26	- 40,308	- 38,154	2,254	5,34
1/28	- 37,436	- 35,449	1,987	5,31
1/30	- 34,943	- 33,114	1,829	5,23
1/32	- 32,761	- 31,029	1,732	5,29
1/34	- 30,833	- 29,211	1,622	5,26
1/36	- 29,116	- 27,597	1,519	5,22
1/38	- 27,580	- 26,135	1,445	5,24
1/40	- 26,196	- 24,819	1,377	5,26
1/45	- 23,272	- 22,028	1,244	5,35
1/50	- 20,932	- 19,748	1,184	5,66

3.4.2.c. Casca cônica $\alpha = 15^\circ$

Também são apresentados os valores do momento fletor na direção s no engastamento em função da relação h/R . Descreve-se estes valores na tabela 3.10.

Observa-se que a convergência nos valores da diferença percentual também ocorre para a relação $h/R = 1/30$, embora a diferença absoluta continue diminuindo. Na figura 30 estes resultados são plotados graficamente.

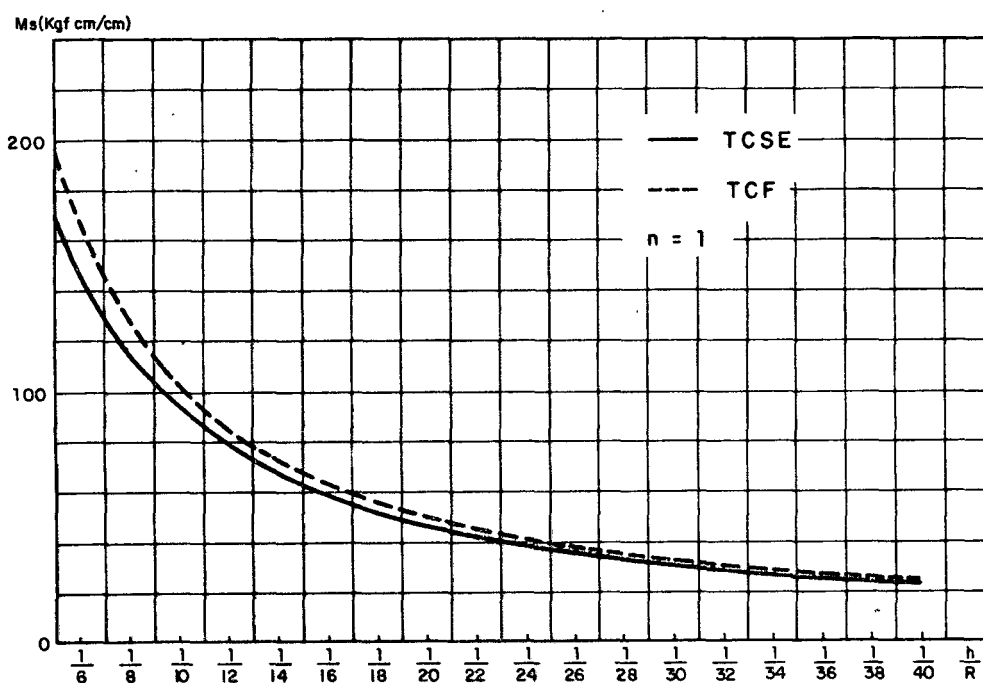


Figura 30 - Momento fletor na direção s no engastamento da casca cônica 15° , sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

TABELA 3.10

CASCA CÔNICA $\alpha = 15^\circ$ $n = 1$				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 196,13	- 171,26	24,87	12,68
1/6	- 165,72	- 147,19	18,53	11,18
1/7	- 143,28	- 128,92	14,36	10,02
1/8	- 125,97	- 114,43	11,54	9,16
1/9	- 112,20	- 102,78	9,42	8,40
1/10	- 101,02	- 93,167	7,85	7,77
1/11	- 91,784	- 85,084	6,700	7,30
1/12	- 84,012	- 78,293	5,719	6,81
1/13	- 77,384	- 72,420	4,964	4,41
1/14	- 71,728	- 67,120	4,608	6,42
1/15	- 66,819	- 62,481	4,338	6,49
1/16	- 62,517	- 58,533	3,984	6,37
1/17	- 58,716	- 55,114	3,602	6,13
1/18	- 55,351	- 51,970	3,381	6,11
1/19	- 52,348	- 49,210	3,138	5,99
1/20	- 49,645	- 46,733	2,912	5,87
1/22	- 44,980	- 42,400	2,580	5,74
1/24	- 41,082	- 38,805	2,277	5,54
1/26	- 37,795	- 35,726	2,069	5,47
1/28	- 34,995	- 33,120	1,875	5,36
1/30	- 32,574	- 30,866	1,708	5,24
1/32	- 30,461	- 28,835	1,626	5,34
1/34	- 28,601	- 27,086	1,515	5,30
1/36	- 26,953	- 25,514	1,439	5,34
1/38	- 25,482	- 24,107	1,375	5,40
1/40	- 24,160	- 22,837	1,323	5,48
1/45	- 21,380	- 20,137	1,243	5,81
1/50	- 19,169	- 17,946	1,223	6,38

3.5. Casca cilíndrica, engastada-livre

Os dados utilizados para a solução deste problema são os mesmos descritos no item 3.3, pois pode-se considerar a solução deste problema como uma casca cônica descrita anteriormente com ângulo $\alpha = 0^\circ$.

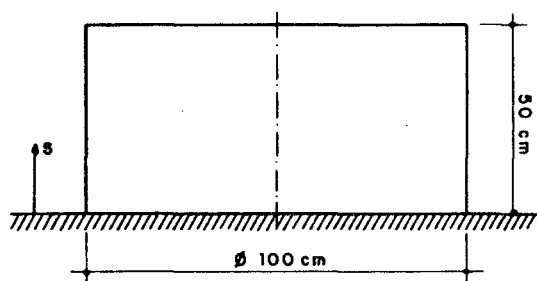


Figura 31

Este problema foi resolvido para dois tipos de carregamentos: o primeiro com pressão interna uniformemente distribuída ao longo da coordenada circunferencial θ , $n = 0$, e o segundo em que a pressão tem uma distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial θ , $n = 1$.

3.5.1. Sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ uniformemente distribuída ao longo da coordenada circunferencial, $n=0$

1) Comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w

O comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w , ao longo da casca são mostrados na figura 32.

Observa-se as mesmas influências da inclusão da deformação cisalhante transversal ϵ_{sz} , sobre o comportamento do momento fletor na direção s e no deslocamento radial w , ao longo da casca. Verifica-se a convergência dos resultados obtidos para TCSE tendendo aos resultados obtidos pela TCF, à medida que a espessura da casca diminua.

2) Valores do momento fletor na direção s no engastamento

Estes valores são mostrados na tabela 3.11, para as relações h/R variando de $1/5$ a $1/50$.

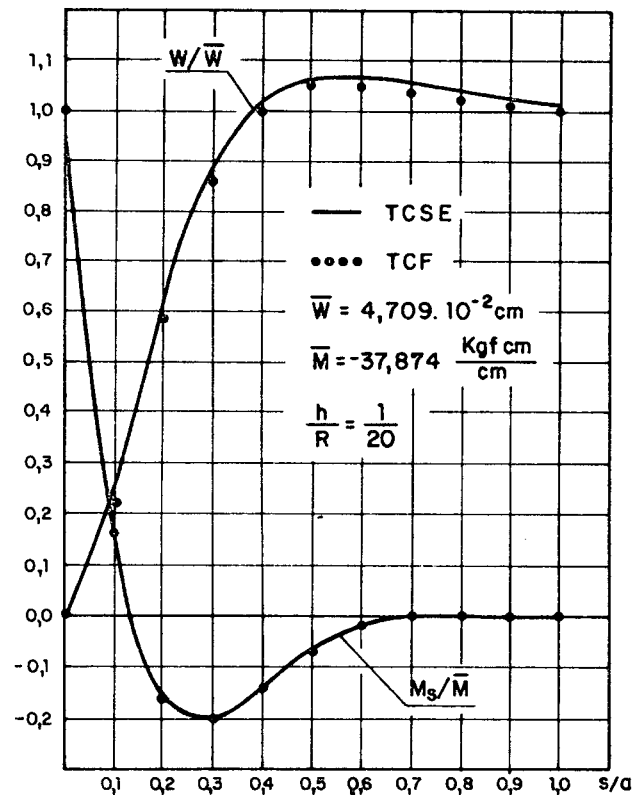
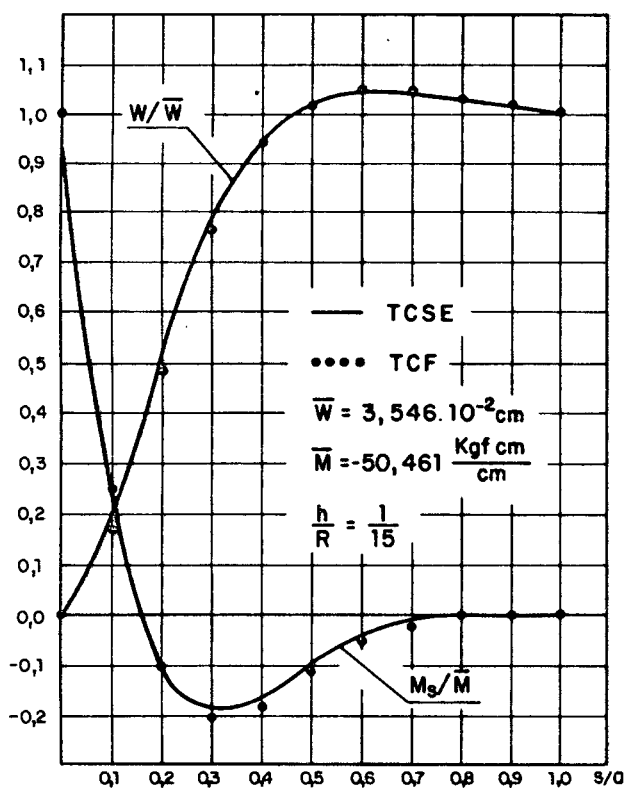
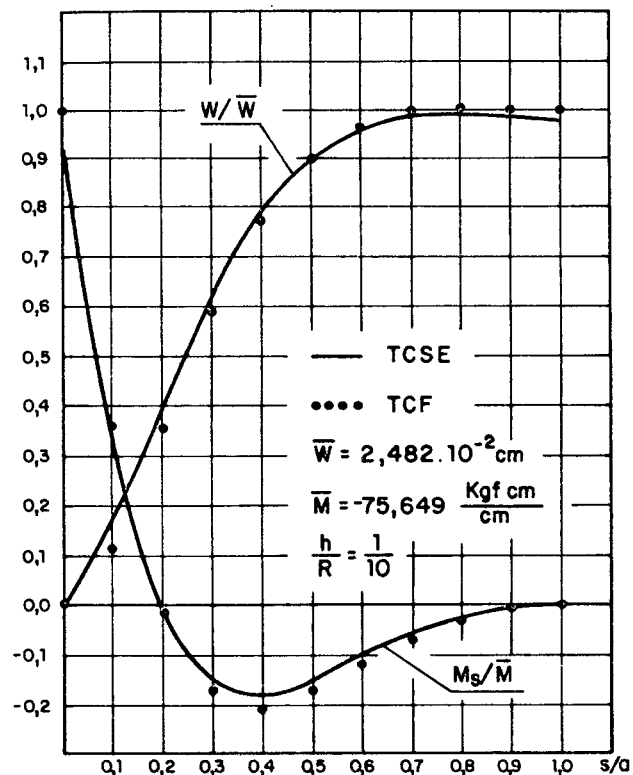
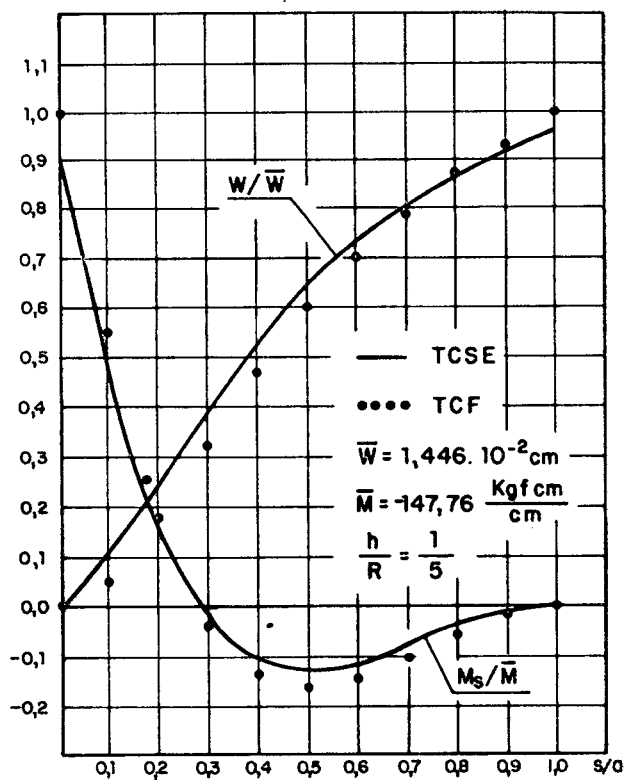


Figura 32 - Momento fletor na direção s e deslocamento radial w , ao longo da casca cilíndrica engastada livre, sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$

TABELA 3.11

CASCA CILÍNDRICA n = 0				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 147,76	- 128,31	19,45	13,16
1/6	- 124,29	- 110,03	13,99	11,26
1/7	- 107,17	- 95,981	11,19	10,44
1/8	- 94,223	- 84,413	8,810	9,35
1/9	- 83,927	- 76,743	7,184	8,56
1/10	- 75,649	- 69,691	5,958	7,87
1/11	- 68,772	- 63,687	5,085	7,39
1/12	- 63,011	- 58,740	4,271	6,78
1/13	- 58,214	- 54,324	3,890	6,68
1/14	- 54,010	- 50,606	3,404	6,30
1/15	- 50,461	- 47,368	3,090	6,13
1/16	- 47,330	- 44,534	2,796	5,91
1/17	- 44,487	- 41,859	2,628	5,91
1/18	- 42,014	- 39,646	2,368	5,64
1/19	- 39,909	- 37,581	2,328	5,83
1/20	- 37,874	- 35,881	1,993	5,26
1/22	- 34,441	- 32,626	1,815	5,27
1/24	- 31,537	- 30,018	1,519	4,82
1/26	- 29,151	- 27,709	1,442	4,95
1/28	- 27,024	- 25,737	1,287	4,76
1/30	- 25,259	- 24,030	1,229	4,86
1/32	- 23,691	- 22,541	1,150	4,85
1/34	- 22,280	- 21,140	1,140	5,16
1/36	- 21,034	- 19,948	1,086	5,16
1/38	- 19,924	- 18,901	1,023	5,13
1/40	- 18,962	- 18,944	0,968	5,11
1/45	- 16,849	- 15,877	0,972	5,77
1/50	- 15,78	- 14,247	0,934	6,13

Verifica-se que existe uma convergência nos valores obtidos pela TCSE e TCF, quanto a diferença percentual. Esta convergência nos resultados ocorrem até a relação $h/R = 1/28$, após a qual a diferença percentual começa a divergir. Observa-se, contudo, que a diferença absoluta dos valores continuam a diminuir. Estes resultados são mostrados graficamente através da Figura 33.

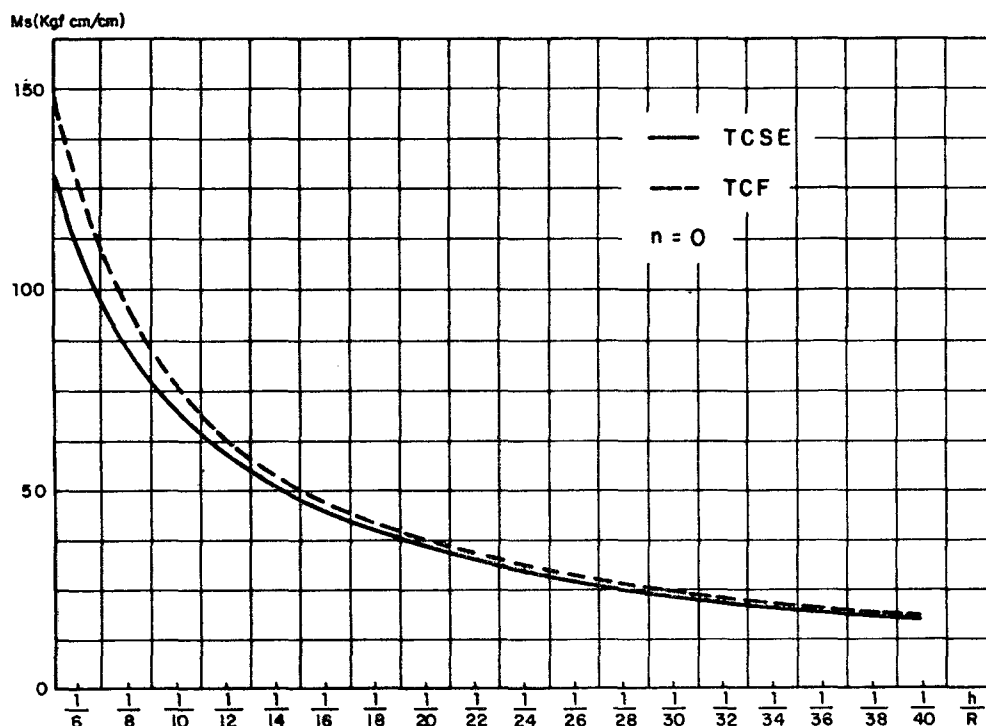


Figura 33 - Momento fletor na direção s no engastamento de casca cilíndrica, sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

3.5.2. Sujeita a uma pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n=1$

1) Comportamento do momento fletor na direção s do deslocamento radial w

Este comportamento é mostrado ao longo da casca através da Figura 34. Verifica-se que ele é muito semelhante ao comportamento observado no exemplo 3.4.1.a. As diferenças são devido ao fato que neste tipo de carregamento observa-se, como nos exemplos anteriores, a influência das deformações cisalhantes transversais.

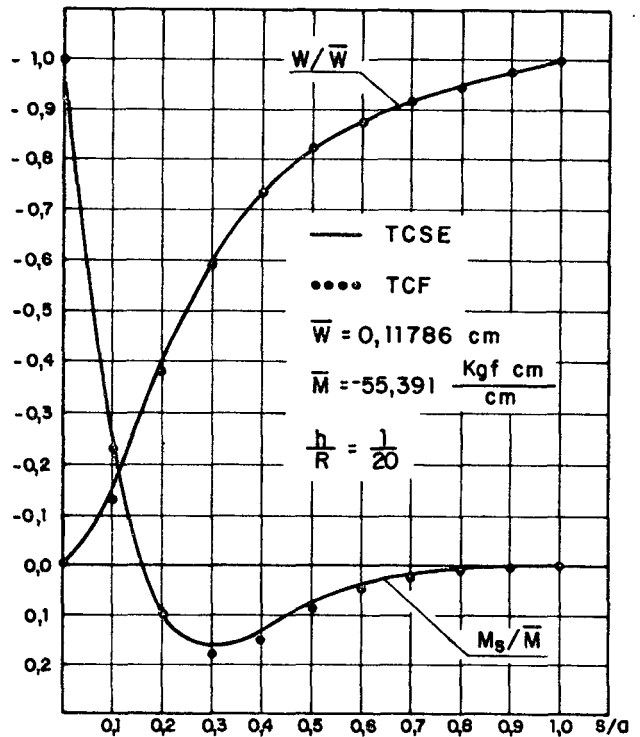
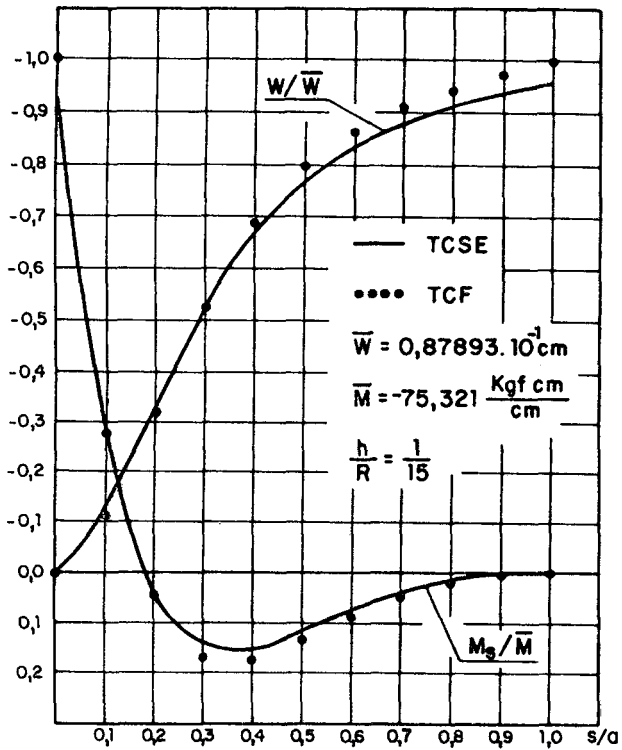
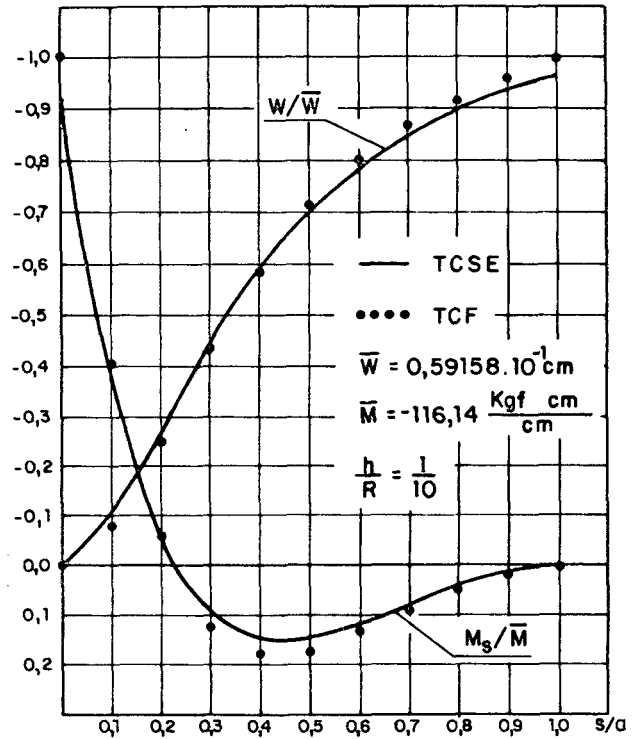
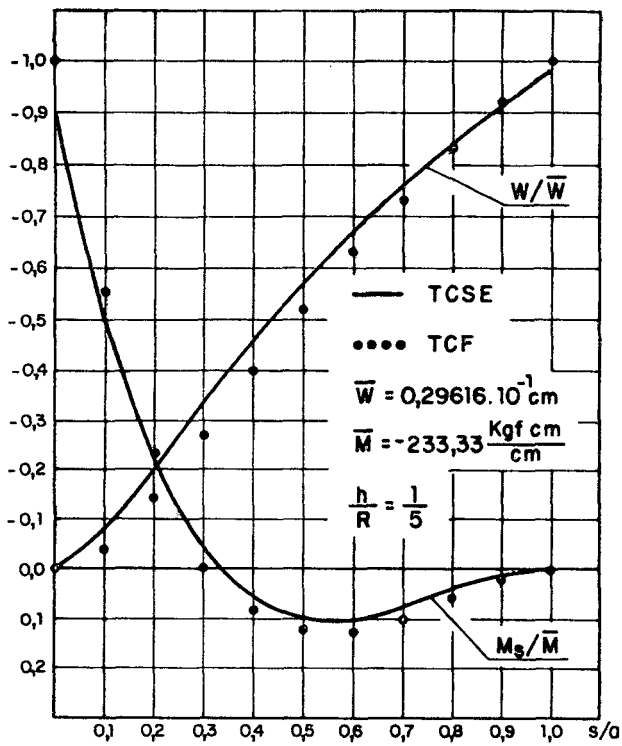


Figura 34 - Momento fletor na direção s e deslocamento radial w , ao longo da casca cilíndrica en-
 gastada livre, sujeita a pressão interna
 $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

2) Valores do momento fletor na direção s no engastamento

Os valores do momento fletor na direção s no engastamento são dados em função da relação h/R , na tabela 3.12.

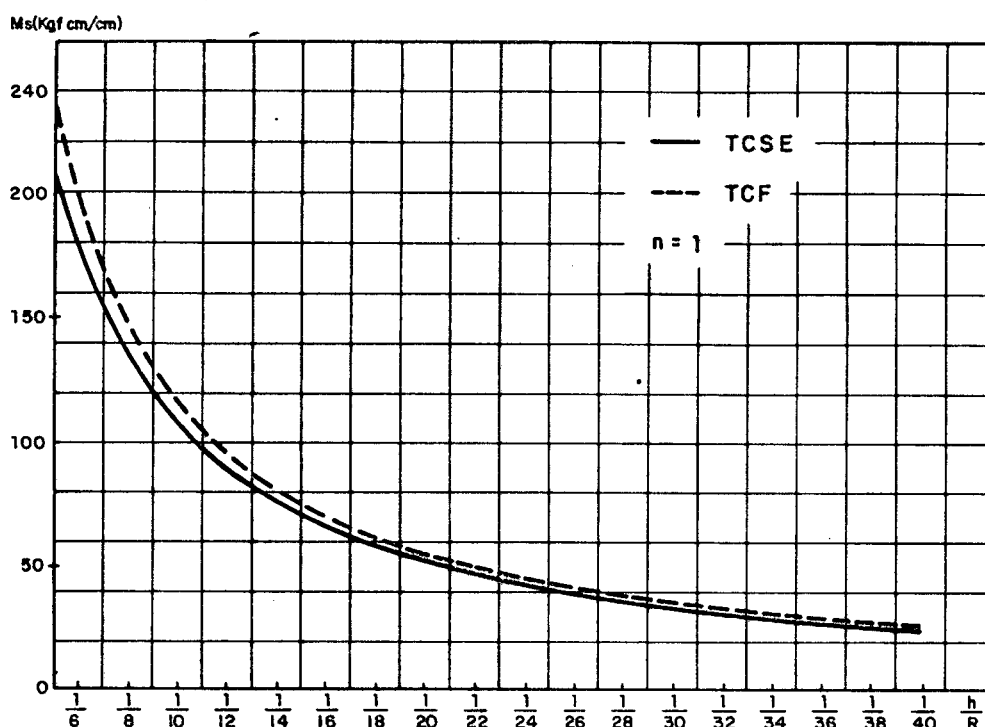


Figura 35 - Momento fletor na direção s no engastamento da casca cilíndrica, sujeita a pressão interna de 1 kgf/cm^2 .

Verifica-se que, neste caso, os valores do momento fletor na direção s e no engastamento obtidos pelas TCSE e TCF, convergem, quanto a diferença percentual, até a relação $h/R = 1/24$ e após este valor ocorre uma oscilação nos seus valores, devido aos problemas numéricos referidos no item 3.2.1., aumentando a seguir a diferença percentual. Da mesma forma que nos outros exemplos a diferença absoluta entre os valores continua diminuindo. Esses valores são mostrados graficamente na figura 35.

TABELA 3.12.

CASCA CILÍNDRICA n = 1				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 233,330	- 207,800	25,53	10,94
1/6	- 195,220	- 176,440	18,78	9,62
1/7	- 167,540	- 162,330	15,21	9,08
1/8	- 146,120	- 134,340	11,78	8,06
1/9	- 129,450	- 119,640	9,81	7,58
1/10	- 116,140	- 107,700	8,44	7,27
1/11	- 105,060	- 97,910	7,15	6,81
1/12	- 95,634	- 90,201	5,430	5,68
1/13	- 87,773	- 82,408	5,365	6,11
1/14	- 81,109	- 75,623	5,486	6,76
1/15	- 75,321	- 70,269	5,052	6,71
1/16	- 70,326	- 66,165	4,161	5,92
1/17	- 65,859	- 61,664	4,195	6,37
1/18	- 61,846	- 57,945	3,901	6,31
1/19	- 58,427	- 54,907	3,520	6,02
1/20	- 55,391	- 52,307	3,084	5,57
1/22	- 49,992	- 47,335	2,657	5,32
1/24	- 45,401	- 43,196	2,205	4,85
1/26	- 41,728	- 39,435	2,293	5,49
1/28	- 38,480	- 36,355	2,125	5,52
1/30	- 35,805	- 34,056	1,749	4,88
1/32	- 33,383	- 31,778	1,605	4,81
1/34	- 31,260	- 29,655	1,595	5,10
1/36	- 29,378	- 27,860	1,518	5,16
1/38	- 27,746	- 25,081	1,665	6,00
1/40	- 26,295	- 24,361	1,434	5,45
1/45	- 23,193	- 21,790	1,403	6,05
1/50	- 20,724	- 19,432	1,292	6,23

3.6. Casca semi-esférica, engastada no equador e com abertura no polo

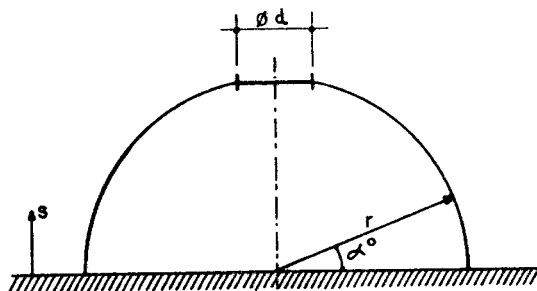


Figura 36

Dados: $E_s = E_\theta = E_z = 2,1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ $\nu = 0,3$

$\alpha_{ts} = \alpha_{t\theta} = 1 \text{ } 1/^\circ\text{C}$ $r = 50 \text{ cm}$ $\ell = 50 \text{ cm}$ $d = 3,5 \text{ cm}$

$T_1 = T_2 = 0^\circ\text{C}$

$\sigma_0 = 2000 \text{ kgf/cm}^2$

$E_0 = 2,1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$

$a = 50 \text{ cm}$

$T_0 = 1^\circ\text{C}$

Espaçamento pivotal adimensionalizado em relação ao comprimento de referência $\Delta = 0,005$

Nº de pontos pivotaes = 201.

Os resultados obtidos na solução desta casca são apresentados, fazendo com que o ângulo α varie de 0° a 80° , a fim de permitir que se possa prescrever as condições de contorno livre, $N_s = N_{s\theta} = Q_s = M_s = M_{s\theta} = 0$, para solucionar o problema. A solução do problema também é obtida para os carregamentos: pressão interna uniformemente distribuída ao longo da coordenada circunferencial, $n = 0$, e pressão interna com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n = 1$.

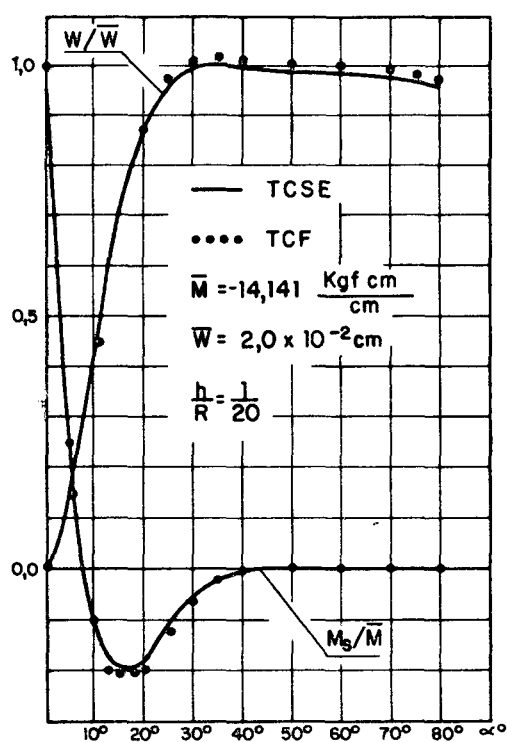
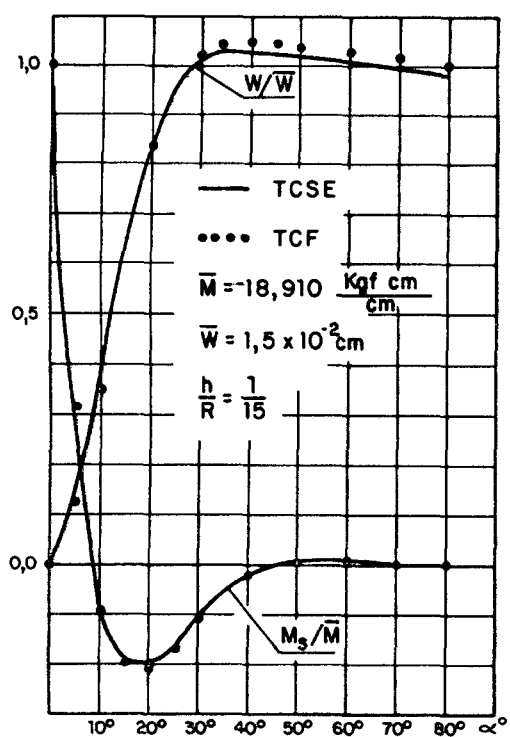
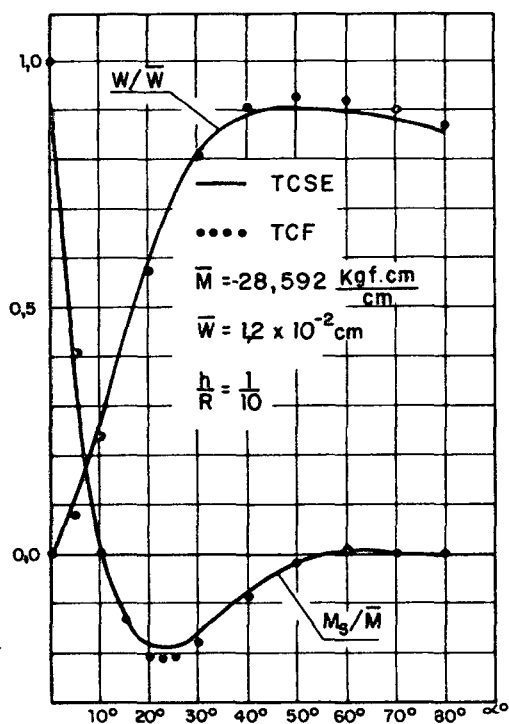
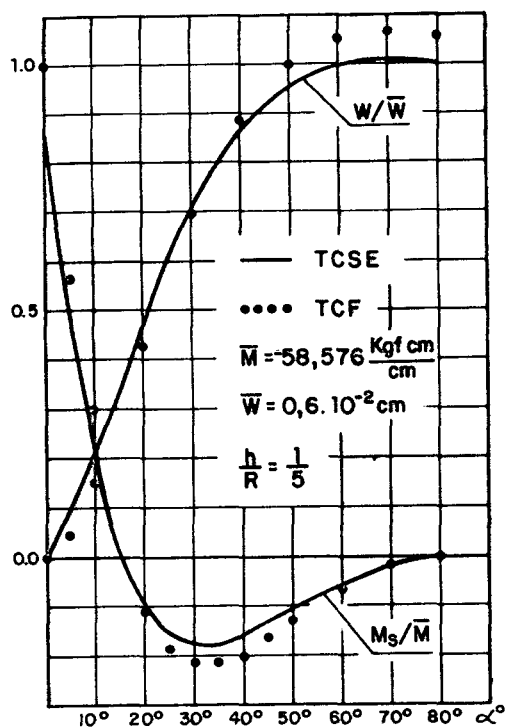


Figura 37- Momento fletor na direção s e deslocamento radial w , ao longo da casca semi-esférica, sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ e $n=0$.

3.6.1 Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ uniformemente distribuída ao longo da coordenada circunferencial, $n=0$.

1) Comportamento do momento fletor s e do deslocamento radial w

Como foi observado nos exemplos anteriores, verifica-se também neste exemplo a tendência da solução para cascas finas e se observa a influência da inclusão das deformações cisalhantes transversais. Estes fatos são mostrados graficamente através da figura 37.

2) Valores do momento fletor na direção s no engastamento

Estes valores são descritos através da tabela 3.13, para relações h/R variando de $1/5$ a $1/50$.

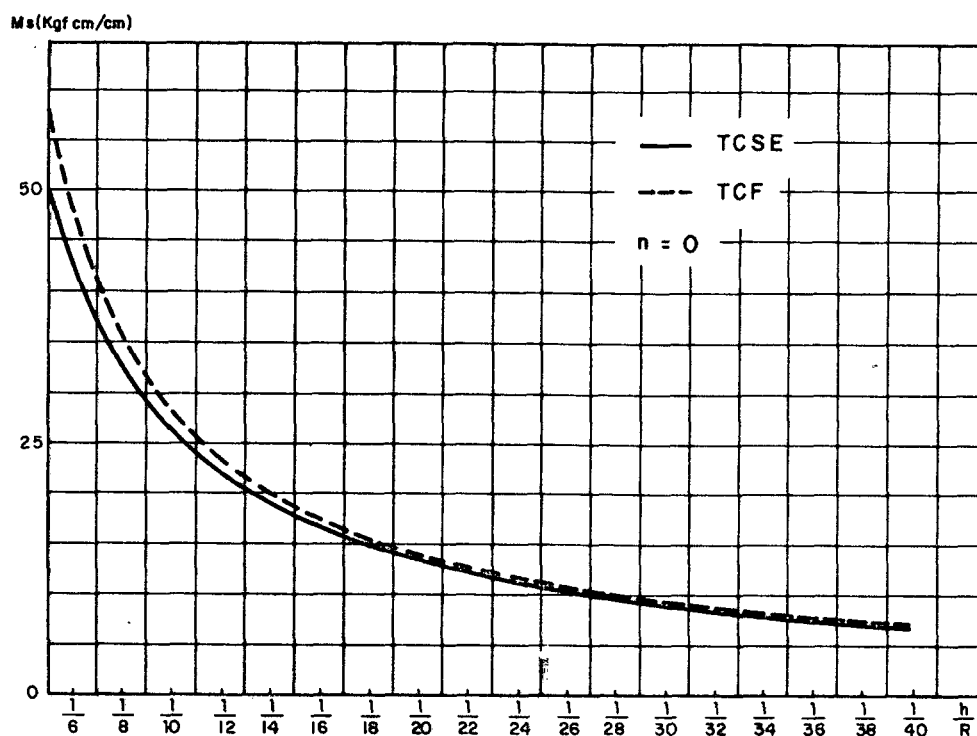


Figura 38 - Momento fletor na direção s e no engastamento de casca semi-esférica, sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

TABELA 3. 13.

CASCA ESFÉRICA n = 0				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 58,576	- 50,377	8,199	14,00
1/6	- 48,446	- 42,703	5,743	11,85
1/7	- 41,269	- 37,053	4,216	10,22
1/8	- 35,953	- 32,700	3,253	9,05
1/9	- 31,851	- 29,282	2,569	8,07
1/10	- 28,592	- 26,501	2,091	7,31
1/11	- 25,933	- 24,198	1,735	6,69
1/12	- 23,730	- 22,259	1,471	6,20
1/13	- 21,871	- 20,622	1,249	5,71
1/14	- 20,283	- 19,289	0,994	4,90
1/15	- 18,913	- 18,075	0,838	4,43
1/16	- 17,722	- 16,971	0,751	4,24
1/17	- 16,659	- 15,976	0,683	4,10
1/18	- 15,726	- 15,099	0,627	3,99
1/19	- 14,892	- 14,318	0,574	3,85
1/20	- 14,139	- 13,603	0,535	3,79
1/22	- 12,839	- 12,379	0,460	3,58
1/24	- 11,761	- 11,349	0,412	3,50
1/26	- 10,852	- 10,483	0,369	3,40
1/28	- 10,070	- 9,732	0,338	3,36
1/30	- 9,397	- 9,088	0,309	3,29
1/32	- 8,806	- 8,508	0,298	3,38
1/34	- 8,285	- 7,998	0,287	3,46
1/36	- 7,823	- 7,543	0,280	3,58
1/38	- 7,411	- 7,142	0,269	3,63
1/40	- 7,038	- 6,780	0,258	3,67
1/45	- 6,253	- 5,994	0,259	4,14
1/50	- 5,628	- 5,373	0,255	4,53

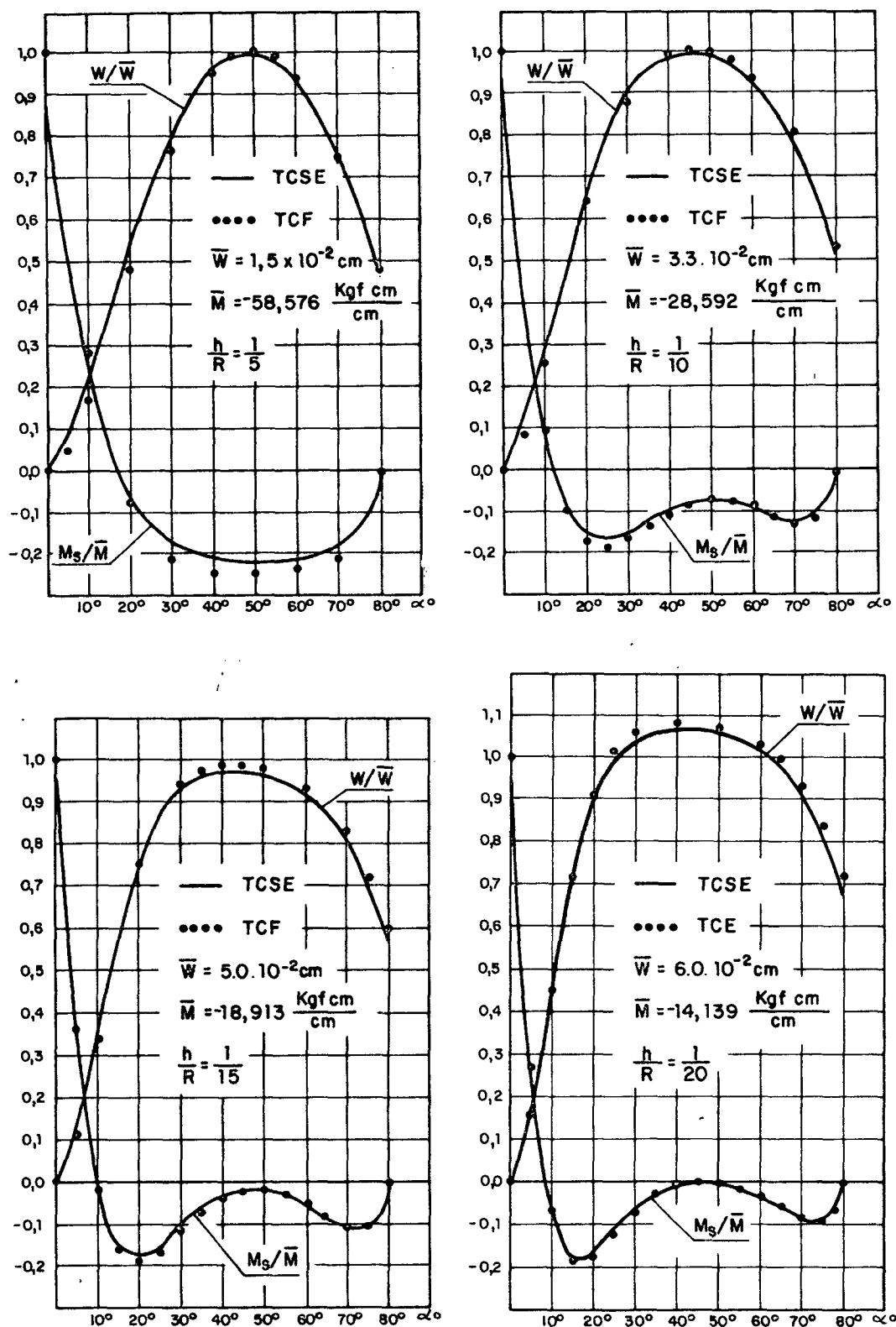


Figura 39 - Momento fletor na direção s e deslocamento radial w , ao longo da casca semi-esférica, sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ e $n = 1$.

Observa-se que, neste caso, a diferença percentual entre os valores do momento fletor M_s obtidos pelas duas teorias convergem até a relação $h/R = 1/30$, a partir da qual ocorre a divergência na diferença percentual. Da mesma forma a diferença absoluta entre os valores diminuem continuamente. Estes valores são mostrados na figura 38.

3.6.2 Sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$ com distribuição cossenoidal ao longo da coordenada circunferencial, $n=1$.

1) Comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial w

Este comportamento é mostrado na figura 39.

2) Valores do momento fletor na direção s no engastamento

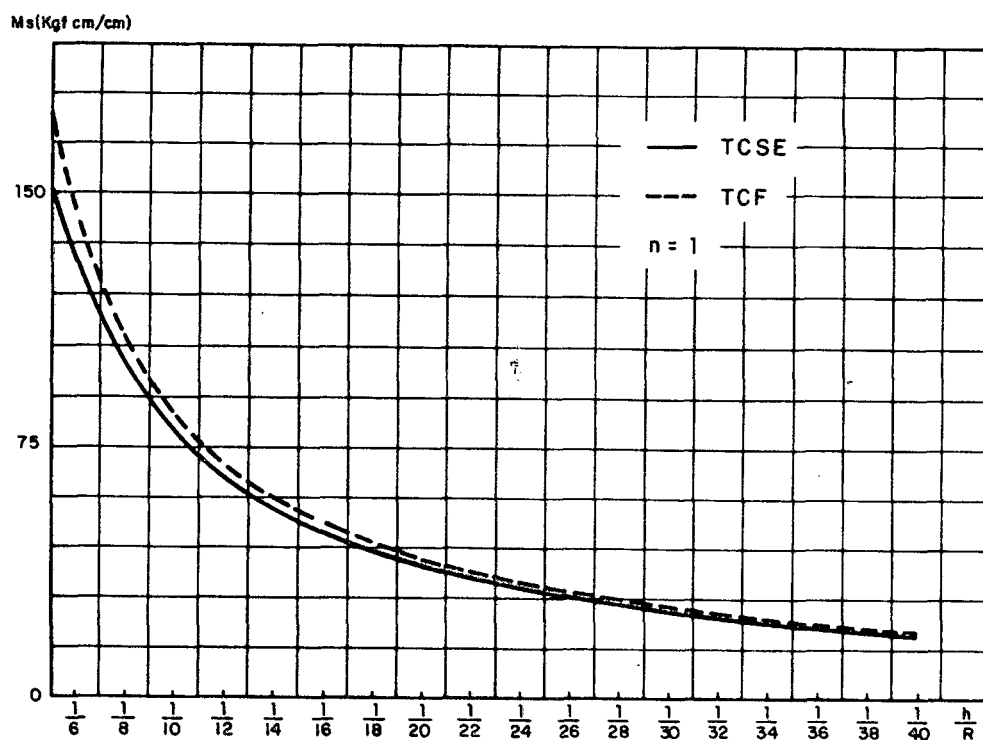


Figura 40 - Momento fletor na direção s e no engastamento da casca semi-esférica, sujeita a pressão interna $q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2$.

Através da tabela 3.14, descreve-se os valores do momento fletor na direção s no engastamento da casca esférica, os quais são dados em função da relação h/R .

Verifica-se que, para este carregamento, ocorre a convergência nos valores da diferença percentual entre os valores de M_s obtidos pelas duas teorias até a relação $h/R = 1/26$. Também como nos demais exemplos a diferença absoluta entre os valores continuam diminuindo, embora a diferença percentual comece a divergir. Esta tabela é apresentada graficamente na figura 40.

TABELA 3.14.

CASCA ESFÉRICA $n = 1$				
Momento fletor na direção s no engastamento $\frac{\text{kgf cm}}{\text{cm}}$				
h/R	T C F	T C S E	DIFERENÇA	DIF. %
1/5	- 174,50	- 152,16	22,34	12,80
1/6	- 144,64	- 128,88	15,76	10,90
1/7	- 123,27	- 111,56	11,71	9,50
1/8	- 107,38	- 98,282	9,10	8,47
1/9	- 95,014	- 87,734	7,280	7,66
1/10	- 85,234	- 79,240	5,994	7,03
1/11	- 77,290	- 72,206	5,083	6,58
1/12	- 70,630	- 66,384	4,246	6,01
1/13	- 65,042	- 61,322	3,720	5,72
1/14	- 60,240	- 56,926	3,314	5,50
1/15	- 56,101	- 53,223	2,878	5,13
1/16	- 52,539	- 49,831	2,708	5,15
1/17	- 49,342	- 46,885	2,457	4,98
1/18	- 46,532	- 44,215	2,317	4,98
1/19	- 43,991	- 41,845	2,146	4,88
1/20	- 41,735	- 35,686	2,049	4,91
1/22	- 37,773	- 35,987	1,786	4,73
1/24	- 34,521	- 33,028	1,493	4,32
1/26	- 31,771	- 30,485	1,286	4,05
1/28	- 29,448	- 28,207	1,241	4,21
1/30	- 27,458	- 26,249	1,209	4,40
1/32	- 25,626	- 24,568	1,058	4,13
1/34	- 24,105	- 23,034	1,071	4,44
1/36	- 22,709	- 21,713	0,996	4,39
1/38	- 21,459	- 20,535	0,925	4,31
1/40	- 20,353	- 19,494	0,859	4,22
1/45	- 18,013	- 17,171	0,842	4,67
1/50	- 16,156	- 15,319	0,839	5,18

3.7. Conclusões Finais

Analizando os exemplos apresentados anteriormente, conclui-se que o modelo analítico numérico e o programa CORTER-2, desenvolvidos a partir da teoria de cascas semi-espessas (TCSE) proposta no capítulo 2, apresentam resultados coerentes. Isto pode ser afirmado, pois a solução determinada por este modelo e programa são comparados a resultados obtidos a partir da teoria de cascas finas, através do programa CORTER-1, onde se observa que:

- ocorre convergência nos resultados do momento fletor na direção s no engastamento entre as duas teorias, à medida que a casca se torna fina.

- ocorre, também, convergência no comportamento do momento fletor na direção s e do deslocamento radial obtidos a partir das duas teorias ao longo da casca, à medida que a casca se torna fina.

Além disso, convém observar que os resultados determinados através do programa CORTER-1, foram comparados a resultados obtidos analiticamente [3].

Comprova-se, ainda, que existe uma influência considerável sobre o modelo analítico, com inclusão das deformações cisalhantes transversais. Como, esta inclusão torna o modelo mais flexível, nota-se que o momento e o esforço cortante na direção s obtidos pela TCSE são menores do que aqueles determinados pela TCF, observando-se, contudo, que os deslocamentos radiais ao longo da casca, nem sempre são maiores do que aqueles determinados pela TCF.

Este modelo analítico-numérico apresenta algumas limitações. Verifica-se, através da Tabela 3.15, que a convergência na diferença percentual entre os valores do momento fletor na direção s e no engastamento obtidos pelas teorias de cascas semi-espessas e cascas finas se dá até uma dada relação h/R e após a mesma começa a ocorrer divergência na diferença percentual.

Desta forma, pode-se afirmar que a teoria de cascas semi-espessas é válida somente para uma faixa de relação h/R . Acontece que a inclusão das deformações cisalhantes transversais cria um novo modelo analítico-numérico, mas não substitui o modelo de cascas finas. Ocorre que, à medida que a casca se torna fina, existe uma grande diminuição na rigidez flexional e torcional, a qual provoca

no método de solução numérica, propagação de erros, no processo de inversão de matrizes que fazem parte dos algoritmos de Cholesky. Este fato faz com que o modelo numérico da teoria de cascas semi-espessas, quando usado para solucionar problemas de cascas finas, divirja da solução obtida pela teoria de cascas finas.

Tabela 3.15. Valores de h/R , onde começa a divergência entre os valores do momento fletor M_s , no engastamento, determinados pelas TCSE e TCF.

TIPO DE CASCA	TIPO DE APOIO	n=0	n=1
Cilíndrica	Bi-engastada	1/17	1/11
Cilíndrica	Engastada livre	1/28	1/24
Cônica $\alpha = 15^\circ$	Engastada livre	1/30	1/30
Cônica $\alpha = 30^\circ$	Engastada livre	1/36	1/30
Cônica $\alpha = 45^\circ$	Engastada livre	1/38	1/22
Esférica	Engastada livre	1/30	1/26

Uma outra limitação ocorre na escolha do espaçamento pivotal para a malha que vai ser usada para solucionar os problemas. Utilizando um espaçamento pivotal grosseiro, ocorrem erros numéricos, principalmente nos cálculos das derivadas, nas regiões onde existe uma grande variação nos valores das variáveis que se quer estudar e observa o comportamento. Refinando a malha, através do uso de um espaçamento pivotal pequeno, pode-se incorrer um aumento demasiado da matriz global, o que provocará uma maior propagação de erros já que serão necessárias mais operações [21]. Sugere-se, desta forma, que os programas CORTER-1 e CORTER-2 sejam melhorados, de forma que possibilitem refinar a malha próxima das regiões onde ocorre uma grande variação nos valores das variáveis. Além disso, necessita-se que a solução destas duas teorias sejam determinadas através de outros métodos numéricos, a fim de se comparar a precisão e o comportamento dos resultados obtidos por estes métodos.

Outra limitação acontece na solução de problemas de cascas esféricas e cônicas. Neste caso, as soluções dos problemas sofrem influências diretas do tipo de condições de contorno que se prescrevem no topo da casca. Para solucionar um problema com con-

dições de contorno livre no topo da casca, o valor do diâmetro na abertura do topo pode provocar nos valores das variáveis que se está determinando, na região próxima do topo, um comportamento bastante diferente do esperado. Por isso, sugere-se que, através de um novo trabalho, se determine condições de contorno de pólo e condição de contorno especiais para aberturas no topo da casca, a fim de que permitam resolver problemas com qualquer abertura ou sem abertura no topo.

Verifica-se, ainda, que os resultados são melhores quando se utiliza a constante adimensionalizada h_0 igual a espessura da casca.

Sugere-se, ainda, que se determine resultados através de uma teoria geral para casca, ou uma teoria de cascas espessas por diferenças finitas ou elementos finitos, a fim de que se possa comparar os valores dos deslocamentos e tensões resultantes com os valores obtidos através da teoria de cascas semi-espessas (TCSE). Desta forma, poder-se-ia estabelecer um limite superior de h/R , até onde seria válida a utilização da TCSE.

Outra sugestão é que se desenvolva um programa que venha prever problemas de descontinuidades na casca. Isso pode ser feito através da utilização das subrotinas do programa CORTER-2, que são devido à teoria de casca semi-espessas, no programa CORTERDE, desenvolvido para calcular problemas de descontinuidades em cascas finas, por [2,3].

Tabela 3.16 - Diferença percentual entre os valores do momento fletor M_s , no engastamento, obtido pelas TCSE e TCF.

TIPO DE CASCA	TIPO DE APOIO	$qz=1 \text{ kgf/cm}^2 \quad n=0$			$qz=1 \text{ kgf/cm}^2 \quad n=1$		
		h/R			h/R		
		1/5	1/10	1/20	1/5	1/10	1/20
Cilíndrica	Bi-engastada	14,26	8,68	7,33	7,95	5,46	7,15
Cilíndrica	Engastada Livre	13,16	7,87	5,26	10,94	7,27	5,57
Cônica $\alpha=15^\circ$	Engastada Livre	15,77	9,01	5,76	12,68	7,77	5,87
Cônica $\alpha=30^\circ$	Engastada Livre	18,30	10,09	6,02	14,29	8,43	5,60
Cônica $\alpha=45^\circ$	Engastada Livre	20,37	11,12	6,36	16,51	9,56	6,27
Esférica	Engastada Livre	14,00	7,31	3,79	12,80	7,03	4,91

Os critérios usados para se definir uma casca fina dependem essencialmente da geometria da casca e do tipo de carregamento, com os quais se está trabalhando. Cabe, normalmente, ao analista escolher qual é o melhor modelo analítico-numérico que deve ser utilizado para análise de uma determinada estrutura. Na tabela 3.16 apresentam-se as diferenças percentuais entre os valores do momento fletor na direção s no engastamento, para diversos tipos de estrutura, valores de h/R e carregamentos, obtidos pela teoria de cascas semi-espessas e teorias de cascas finas.

A partir desta tabela o analista tem condições de se orientar quanto à opção do modelo a ser utilizado, podendo, ainda, ter uma avaliação da diferença dos resultados a partir da escolha da TCF ou da TCSE como instrumento de análise.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Kraus, H.; "Thin elastic shells", Jhon Wiley and Sons, Ind., New York (1967).
- [2] Das, M. L.; "Analysis of unisymmetrical bending of moderately thick shells of revolution", Proceedings of the 3rd. International Conference on Structural Mechanics in Reator Technology, Vol. 5, Part M, 1975.
- [3] Guenther, R.; Análise de tensões térmicas em cascas de revolução", Dissertação de Mestrado, Centro Tecnológico, UFSC (1979).
- [4] Alves, D. B.; "Teoria das cascas", Centro Tecnológico, UFSC, (1977).
- [5] Alves, D. B.; "Teoria da elasticidade", Centro Tecnológico, UFSC, (1977).
- [6] Budiansky, B. and Radkowsky, P. P., "Numerical analysis of unisymmetrical bending of shells of revolution, AIAA J., Vol. 1, Nº 8, August, 1963.
- [7] Goldeberg, J. E.; Baluch, M. H. and Tang, Y. K., "Analysis of moderately thick shells of revolution", Proceedings of the First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Tecnology, Berlin, 20-24 Sept. 1971, Vol. 4, Part G, 37-48.
- [8] Goldeberg, J. E.; Korman, T. and Baluch, M. H.; "On the use of various shell theories in the analysis of axisymmetrically loaded circular containers", Nuclear Engineering and Design, North-Holand Publishing Co., Amsterdam, July 1974.
- [9] Naghdi, P. M.; "On the theory of thin elastic shells", Q. Appl. Math., January, 1959.
- [10] Reissner, E.; "Stress strain relations in the theory of thin elastic shells", J. Math. Phys., 31, 109-119, 1952.
- [11] Tauchert, T. R.; "Energy principles in structural mechanics", McGraw-Hill, 1974.

- [12] Dym, C. L. and Shames, I. H.; "Solid mechanics: a variational approach", McGraw-Hill, 1973.
- [13] Alves, D. B.; "Métodos Numéricos", Centro Tecnológico/UFSC , 1977.
- [14] Naghdi, P. M.; "An Survey of recent progress in the theory of elastic shells", Aplied Mechanics Reviens, 1956.
- [15] Alves, D. B.; "Análise numérica de cascas ortotrópicas", Anais do IV COBEM, A 11, 131-142, 1977.
- [16] Alves, D. B.; "Cascas ortotrópicas de revolução reforçadas por anéis", A 12, 143-155, 1977.
- [17] Guenther, R.; "Análise de tensões térmicas em cascas de revolução", D 14, 217-229, 1979.
- [18] Guenther, R.; "Análise de tensões em cascas ortotrópicas de revolução", ABCM, 47-58, 1980.
- [19] Alves, D. B.; "Programa analisador dinâmico de cascas ortotrópicas de revolução", V COBEM, D, 156-165, 1979.
- [20] Selke, C. A. C.; "Matrizes de rigidez e de tensões para um elemento finito de cascas ortotrópicas de revolução", Dissertação de Mestrado, Centro Tecnológico, UFSC, 1980.
- [21] Melosh, R. J.; Bamford, R. M.; "Eficient solution of load-deflection equations", Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 95, 1969.

APÊNDICES

A - SISTEMAS DE COORDENADAS

Um ponto sobre a casca é localizado através das coordenadas da superfície de referência e por uma coordenada normal à superfície de referência, ao longo da espessura da casca.

Um ponto sobre a superfície de referência é localizado a partir de um sistema de coordenadas. Em cascas de revolução, utiliza-se, normalmente, um sistema cujas linhas de coordenadas coincidem com as direções principais da superfície de referência. Neste trabalho utilizar-se-á, como linhas de coordenadas, s e θ em que s é o comprimento medido ao longo do meridiano da casca e θ é o ângulo circunferencial, como mostrado na figura 41.

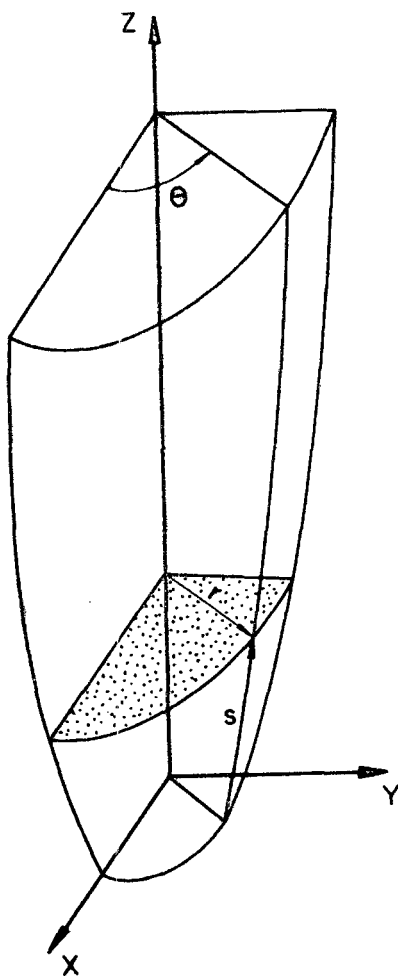


Figura 41

As propriedades geométricas da casca são definidas pela forma do meridiano e pela espessura da casca, que também pode ser

variável ao longo do meridiano. A forma do meridiano pode ser dada por uma função "r", a qual fornece a distância perpendicular do eixo de revolução ao meridiano da casca, em função do comprimento do meridiano (figura 41):

$$(A.1) \quad r = r(s)$$

A espessura da casca também pode ser definida em função do comprimento do meridiano e dada da seguinte forma:

$$(A.2) \quad h = h(s)$$

Completando as equações do meridiano, define-se uma função que localiza um ponto qualquer sobre a casca ao longo do eixo de revolução, dada por:

$$(A.3) \quad z = z(s)$$

Com as expressões A.1 e A.3 pode-se determinar as propriedades geométricas da casca, determinando os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental da superfície. Com estes coeficientes, utilizando-se do teorema de Rodrigues [1,4] determinam-se as expressões para os raios de curvaturas principais (R_s, R_θ), os quais são mostrados através da figura 42.

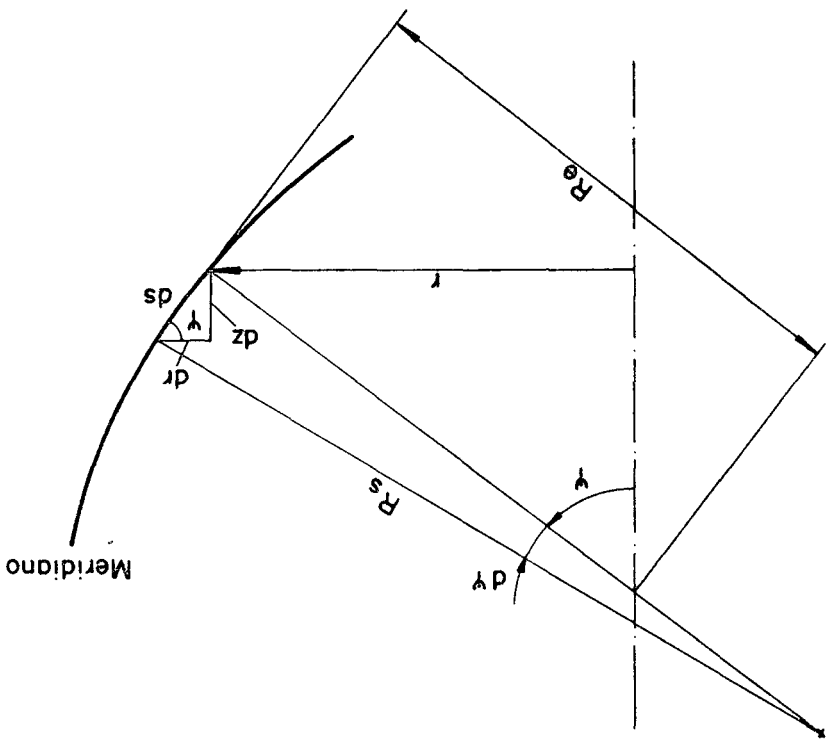


Figura 42

B - TEORIA GERAL DE CASCAS

B.1 - Relações Deformações-Deslocamentos

As relações deformações-deslocamentos utilizadas neste trabalho são desenvolvidas a partir das relações deformações-deslocamentos propostos por [4], levando em conta apenas os termos lineares, observando ainda as hipóteses pertinentes a teoria geral de cascas e a geometria das cascas de revolução.

Num sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais (x,y,z) as relações deformações-deslocamentos são:

$$\epsilon_x = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{w}{\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\gamma} \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{u}{\alpha} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{v}{\beta} \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right]$$

(B1-1)

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{\beta \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{v}{\beta \gamma} \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{\gamma \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{w}{\gamma \alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{\alpha \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{u}{\alpha \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

onde u, v, w são os deslocamentos nas direções (x,y,z), α , β , γ são coeficientes de Lamé [3,4], ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z são deformações normais e γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} são as deformações cisalhantes.

Utilizando as equações de Gauss-Codazzi e os coeficientes de Lamé para uma casca de revolução e um sistema de coordenadas ortogonais, tem-se as relações [3,4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\beta}{B} \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{\alpha}{A} \frac{\partial B}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= \frac{A}{R_x} & \frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{B}{R_y} \end{aligned} \quad (B1.2)$$

onde A e B são os coeficientes da primeira forma fundamental das superfícies e R_x e R_y são os raios de curvaturas das linhas de coordenadas principais.

Substituindo as expressões B1.2 e os coeficientes de Lamé nas equações B1.1, obtém-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{B \left(1 + \frac{z}{R_x}\right)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{A}{R_x} w \right] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{B \left(1 + \frac{z}{R_y}\right)} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{A} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{A}{R_y} w \right] \\ \epsilon_x &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (B1.3)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{B \left(1 + \frac{z}{R_y}\right)} \left[B \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{B}{R_y} v \right]$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{A \left(1 + \frac{z}{R_x}\right)} \left[A \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{A}{R_x} u \right]$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{A \left(1 + \frac{z}{R_x}\right)} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial y} \right] + \frac{1}{B \left(1 + \frac{z}{R_y}\right)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{A} \frac{\partial B}{\partial x} \right]$$

Segunda esta teoria os deslocamentos podem ser representados por (ver também item 2.1):

$$U(x, y, z) = u(x, y) + z \beta_x(x, y)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) + z \beta_y(x, y) \quad (B1.4)$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) + z w'(x, y) + \frac{1}{2} z^2 w''(x, y)$$

Substituindo B1.4 em B1.3 chega-se as seguintes expressões:

$$\epsilon_x = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_x}\right)} \left[\epsilon_x^0 + z \epsilon'_x + \frac{1}{2} z^2 \epsilon''_x \right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_y}\right)} \left[\epsilon_y^0 + z \epsilon'_y + \frac{1}{2} z^2 \epsilon''_y \right]$$

$$\epsilon_z = w' + z w'' \quad (B1.5)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_y}\right)} \left[\mu_y^0 + z \mu'_y + \frac{1}{2} z^2 \mu''_y \right]$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_x}\right)} \left[\mu_x^0 + z \mu'_x + \frac{1}{2} z^2 \mu''_x \right]$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_x})} [\gamma_x^o + z\gamma_x'] + \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_y})} [\gamma_y^o + z\gamma_y']$$

cujos elementos são:

$$\epsilon_x^o = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{w}{R_x}$$

$$\epsilon_x' = \frac{1}{A} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\beta_y}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{w'}{R_x}$$

$$\epsilon_x'' = \frac{w''}{R_x}$$

$$\epsilon_y^o = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{w}{R_y}$$

$$\epsilon_y' = \frac{1}{B} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{\beta_x}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{w'}{R_y}$$

$$\epsilon_y'' = \frac{w''}{R_y}$$

(B1.6)

$$\gamma_x^o = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\gamma_x' = \frac{1}{A} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\beta_x}{AB} \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\gamma_y^o = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\gamma'_y = \frac{1}{B} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\beta_y}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\mu_x^0 = \beta_x + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R_x}$$

$$\mu'_x = \frac{1}{A} \frac{\partial w'}{\partial x}$$

$$\mu''_x = \frac{1}{A} \frac{\partial w''}{\partial x}$$

$$\mu_y^0 = \beta_y + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_y}$$

$$\mu'_y = \frac{1}{B} \frac{\partial w'}{\partial y}$$

$$\mu''_y = \frac{1}{B} \frac{\partial w''}{\partial y}$$

onde ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_x^0 , γ_y^0 , μ_x^0 , μ_y^0 são as deformações na superfície de referência.

Observa-se, ainda, que β_x e β_y não podem ser dadas mais em função dos deslocamentos e suas derivadas, como aconteceu na teoria de cascas finas [1,3,9,10], passando a constituir graus de liberdade do problema.

Desprezando os efeitos das deformações cisalhantes transversais, tensão normal transversal e a relação h/R , nas equações A1.5, chega-se as mesmas equações obtidas pela teoria de cascas finas desenvolvida em [3].

C - TEORIA PARA CASCAS DE REVOLUÇÃO SEMI-ESPESSAS

C.1 - Relações Deformação-deslocamentos

Assumindo as hipóteses determinadas no item 2.2, as expressões Bl.4 são simplificadas pela exclusão de w' e w'' devido a de que a tensão normal transversal σ_z é desprezível.

Desta forma o deslocamento w é expresso como:

$$W(x,y,z) = w(x,y) \quad (C1.1)$$

Assim sendo as relações deformações-deslocamentos são simplificadas e ficam como:

$$\epsilon_x = \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_x})} [\epsilon_x^0 + z\epsilon'_x]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_y})} [\epsilon_y^0 + z\epsilon'_y]$$

$$\epsilon_z = 0$$

(C1.2)

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_y})} \mu_y^0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_x})} \mu_x^0$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_x})} [\gamma_x^0 + z\gamma'_x] + \frac{1}{(1 + \frac{z}{R_y})} [\gamma_y^0 + z\gamma'_y]$$

cujos elementos são dados em termos dos deslocamentos os mesmos descritos em B1.6.

Considerando os coeficientes de Lamé para uma casca de revolução, as equações B1.6 podem ser particularizadas e adimensionalizadas através das seguintes relações e constantes geométricas:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \rho = \frac{r}{a} \quad \omega_\xi = \frac{a}{R_\xi} \quad \omega_\theta = \frac{a}{R_\theta} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \quad (\text{C1.3})$$

Assim procedendo as expressões 1.6 ficam:

$$\begin{aligned} \epsilon_\xi^0 &= \frac{1}{a} (\dot{u} + \omega_\xi w) & \epsilon'_\xi &= \frac{\dot{\beta}_\xi}{a} \\ \epsilon_\theta^0 &= \frac{1}{a} \left(\frac{\dot{v}}{\rho} + \dot{\gamma} u + \omega_\theta w \right) & \epsilon'_\theta &= \frac{1}{a} \left(\frac{\dot{\beta}_\theta}{\rho} + \gamma \dot{\beta}_\xi \right) \\ \gamma_\xi^0 &= \frac{\dot{v}}{a} & \gamma'_\xi &= \frac{\dot{\beta}_\theta}{a} \\ \gamma_\theta^0 &= \frac{1}{a} \left(\frac{\dot{u}}{\rho} - \dot{\gamma} v \right) & \gamma'_\theta &= \frac{1}{a} \left(\frac{\dot{\beta}_\xi}{\rho} - \gamma \dot{\beta}_\theta \right) \end{aligned} \quad (\text{C1.4})$$

$$\mu_\xi^0 = \frac{1}{a} (a \beta_\xi + \dot{w} - \omega_\xi u)$$

$$\mu_\theta^0 = \frac{1}{a} \left(a \beta_\theta + \frac{\dot{w}}{\rho} - \omega_\theta v \right)$$

que substituídas em C1.2 tornam as relações deformações-deslocamentos como:

$$\epsilon_{\xi} = \frac{1}{(a + z\omega_{\xi})} [\dot{u} + \omega_{\xi}w + z\beta'_{\xi}]$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{(a + z\omega_{\theta})} \left[\frac{\dot{v}}{\rho} + \gamma u + \omega_{\theta}w + z \left(\frac{\dot{\beta}_{\theta}}{\rho} + \gamma\beta_{\xi} \right) \right]$$

$$\epsilon_z = 0 \quad (C1.5)$$

$$\epsilon_{\xi\theta} = \frac{1}{(a + z\omega_{\xi})} [\dot{v} + z\beta'_{\theta}] + \frac{1}{(a + z\omega_{\theta})} \left[\frac{\dot{u}}{\rho} - \gamma v + z \left(\frac{\dot{\beta}_{\xi}}{\rho} + \gamma\beta_{\xi} \right) \right]$$

$$\epsilon_{\xi z} = \frac{1}{(a + z\omega_{\xi})} [a\beta_{\xi} + \dot{w} - \omega_{\xi}u]$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{(a + z\omega_{\theta})} [a\beta_{\theta} + \frac{\dot{w}}{\rho} - \omega_{\theta}v]$$

onde $(\quad)' = \frac{\partial}{\partial \xi} (\quad)$ e $(\quad)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\quad)$

D - COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Os coeficientes das matrizes P, Q, R e C que compõem as equações de equilíbrio 2.34, são dados da seguinte forma:

$$p_{11} = b \{1 + \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$p_{14} = -b\psi (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$p_{22} = \frac{b(1 - \nu)}{2} \{1 + \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$p_{25} = -\frac{b(1 - \nu)}{2} \psi (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$p_{33} = \frac{b_z(1 - \nu)}{2} \{1 + \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$p_{41} = \lambda^2 d (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})$$

$$p_{44} = \lambda^2 d \{1 - c \psi \omega_{\xi} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})\}$$

$$p_{52} = \lambda^2 d \frac{(1 - \nu)}{2} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})$$

$$p_{55} = \lambda^2 d \frac{(1 - \nu)}{2} \{1 - c \psi \omega_{\xi} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})\}$$

$$q_{11} = b' + b\gamma + \{(b' + b\gamma) \psi \omega_{\xi} + b (\psi' \omega_{\xi} + \psi \omega_{\xi}')\} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$+ b \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi}' - \omega_{\theta}')$$

$$q_{12} = \frac{b(1+v)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$q_{13} = b(\omega_\xi + v\omega_\theta) + b\psi\omega_\xi^2(\omega_\xi - \omega_\theta) + \frac{b_z(1-v)}{2} \omega_\xi \{1 + \psi\omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$q_{14} = -\{(b' + b\gamma)\psi + b\psi'\}(\omega_\xi - \omega_\theta) - b\psi(\omega_\xi' - \omega_\theta')$$

$$q_{21} = -\frac{b(1-v)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$q_{22} = \frac{(1-v)}{2} \{(b' + b\gamma) + [(b' + b\gamma)\psi\omega_\xi + b(\psi'\omega_\xi + \psi\omega_\xi')]\}(\omega_\xi - \omega_\theta) + b\psi\omega_\xi(\omega_\xi' - \omega_\theta')$$

$$q_{25} = -\frac{(1-v)}{2} \{(b'\psi + b\psi' + b\gamma\psi)(\omega_\xi - \omega_\theta) + b\psi(\omega_\xi' - \omega_\theta')\}$$

$$q_{31} = -b\{\omega_\xi + v\omega_\theta + \psi\omega_\xi^2(\omega_\xi - \omega_\theta)\} - \frac{b_z(1-v)}{2} \omega_\xi \{1 + \psi\omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$q_{33} = \frac{(1-v)}{2} \{(b_z' + b_z\gamma) + [(b_z' + b_z\gamma)\psi\omega_\xi + b_z(\psi'\omega_\xi + \psi\omega_\xi')]\}(\omega_\xi - \omega_\theta) + b_z\psi\omega_\xi(\omega_\xi' - \omega_\theta')$$

$$q_{34} = \frac{b_z(1-v)}{2} \{1 + \psi\omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta)\} + b\psi\omega_\xi(\omega_\xi - \omega_\theta)$$

$$q_{41} = \lambda^2 \{(d' + d\gamma)(\omega_\theta - \omega_\xi) + d(\omega_\theta' - \omega_\xi')\}$$

$$q_{43} = \lambda^2 d \omega_{\xi} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) - \frac{b_z (1 - \nu)}{2} \{1 + \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$q_{44} = \lambda^2 \{(d' + d\gamma) - c [(d' + d\gamma) \psi \omega_{\xi} + d (\psi' \omega_{\xi} + \psi \omega_{\xi}')] (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) - c d \psi \omega_{\xi} (\omega_{\theta}' - \omega_{\xi}')\}$$

$$q_{45} = \lambda^2 d \frac{(1 + \nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$q_{52} = \lambda^2 \frac{(1 - \nu)}{2} \{(d' + d\gamma) (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) + d (\omega_{\theta}' - \omega_{\xi}')\}$$

$$q_{54} = -\lambda^2 d \frac{(1 + \nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$q_{55} = \lambda^2 \frac{(1 - \nu)}{2} \{(d' + d\gamma) - c [(d' + d\gamma) \psi \omega_{\xi} + d (\psi' \omega_{\xi} + \psi \omega_{\xi}')] (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) - c d \psi \omega_{\xi} (\omega_{\theta}' - \omega_{\xi}')\}$$

$$r_{11} = \nu (b' \gamma + b \gamma' + b \gamma^2) - b \gamma^2 \{1 + \psi \omega_{\theta} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})\} - (1 - \nu) \left\{ \frac{b n^2}{\rho^2} [1 - \psi \omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})] + \frac{b_z \omega_{\xi}^2}{2} [1 + \psi \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})] \right\}$$

$$r_{12} = b' \nu \frac{n}{\rho} - \frac{b (3 - \nu)}{2} \frac{n \gamma}{\rho} \{1 - \psi \omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} = & b' \{ (\omega_\xi + v \omega_\theta) + \psi \omega_\xi^2 (\omega_\xi - \omega_\theta) \} + b \{ (\omega_\xi' + v \omega_\theta') + \\
& + \{ \psi' \omega_\xi^2 + 2\psi \omega_\xi \omega_\xi' + \gamma (1 - v) + \psi (\omega_\xi^2 + \omega_\theta^2) \} \\
& (\omega_\xi - \omega_\theta) + \psi \omega_\xi^2 (\omega_\xi' - \omega_\theta') \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{14} = & b\psi (\gamma^2 + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{\rho^2}) (\omega_\theta - \omega_\xi) + \\
& + \frac{b_z (1-v)}{2} \omega_\xi \{ 1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta) \}
\end{aligned}$$

$$r_{15} = -b \frac{(3-v)}{2} \frac{n\gamma}{\rho} \psi (\omega_\xi - \omega_\theta)$$

$$\begin{aligned}
r_{21} = & - \frac{(1-v)}{2} \frac{n}{\rho} \{ b' + b\gamma [1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)] \} - \\
& - \frac{b n\gamma}{\rho} \{ 1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{22} = & - \frac{(1-v)}{2} \{ b'\gamma + b (\gamma' + 2\gamma^2) + b_z \omega_\theta^2 + (b\gamma^2 + b_z \omega_\theta^2) \\
& \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \} - \frac{b n^2}{\rho^2} \{ 1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{23} = & - \frac{b n}{\rho} \{ \omega_\theta + v \omega_\xi + \psi \omega_\theta^2 (\omega_\theta - \omega_\xi) \} - \\
& - \frac{b_z (1-v)}{2} \frac{n}{\rho} \omega_\theta \{ 1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi) \}
\end{aligned}$$

$$r_{24} = \frac{b (3-v)}{2} \frac{n\gamma}{\rho} \psi (\omega_\theta - \omega_\xi)$$

$$r_{25} = b\psi \left\{ \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 (1 - \nu)}{2} \right\} (\omega_\theta - \omega_\xi) + \\ + \frac{b_z (1 - \nu)}{2} \omega_\theta \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\}$$

$$r_{31} = - \frac{(1 - \nu)}{2} \{ (b_z' \omega_\xi + b_z \omega_\xi' + b_z \gamma \omega_\xi) + [(b_z' \omega_\xi + b_z \omega_\xi' + \\ + b_z \gamma \omega_\xi) \psi \omega_\xi + b_z \omega_\xi (\psi' \omega_\xi + \psi \omega_\xi')] \} (\omega_\xi - \omega_\theta) - \\ - b_z \psi \omega_\xi^2 (\omega_\xi' - \omega_\theta') \} - b \gamma \{ \nu \omega_\xi + \omega_\theta + \\ + \psi \omega_\theta^2 (\omega_\theta - \omega_\xi) \}$$

$$r_{32} = - \frac{b_z (1 - \nu)}{2} \frac{n}{\rho} \omega_\theta \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\} - \\ - \frac{b n}{\rho} \{ \omega_\theta + \nu \omega_\xi + \psi \omega_\theta^2 (\omega_\theta - \omega_\xi) \}$$

$$r_{33} = - \frac{b_z (1 - \nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\} - b \{ \omega_\xi (\omega_\xi + \nu \omega_\theta) + \\ + \omega_\theta (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) + \psi (\omega_\xi^3 - \omega_\theta^3) (\omega_\xi - \omega_\theta) \}$$

$$r_{34} = \frac{(1 - \nu)}{2} \{ (b_z' + b_z \gamma) + [(b_z' + b_z \gamma) \psi \omega_\xi + \\ + b_z (\psi' \omega_\xi + \psi \omega_\xi')] \} (\omega_\xi - \omega_\theta) + b_z \psi \omega_\xi (\omega_\xi' - \omega_\theta') \} + \\ + b \gamma \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)$$

$$r_{35} = \frac{b_z (1 - \nu)}{2} \frac{n}{\rho} \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\} + \frac{b n}{\rho} \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)$$

$$r_{41} = \lambda^2 d \left\{ \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} + \gamma^2 \right\} (\omega_\theta - \omega_\xi) + \frac{b_z (1-v)}{2} \omega_\xi \{1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$r_{42} = \lambda^2 d \frac{(3-v)}{2} \frac{n\gamma}{\rho} (\omega_\theta - \omega_\xi)$$

$$r_{43} = \lambda^2 \{ [d' \omega_\xi + d \omega_\xi' + d\gamma (\omega_\xi - \omega_\theta)] (\omega_\theta - \omega_\xi) + d \omega_\xi (\omega_\theta' - \omega_\xi') \}$$

$$r_{44} = \lambda^2 \left\{ v (d' \gamma + d \gamma') - \frac{d (1-v)}{2} \frac{n^2}{\rho} [1 + c \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)] + d \gamma^2 [v - 1 + c \psi \omega_\theta (\omega_\xi - \omega_\theta)] \right\} - b_z \frac{(1-v)}{2} \{1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$r_{45} = \lambda^2 \frac{n}{\rho} \left\{ v d' - \frac{d (1+v)}{2} \gamma [1 + C \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)] \right\}$$

$$r_{51} = -\lambda^2 \frac{d (3-v)}{2} \frac{n\gamma}{\rho} (\omega_\xi - \omega_\theta)$$

$$r_{52} = -\lambda^2 d \left\{ \frac{n^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 (1-v)}{2} \right\} (\omega_\xi - \omega_\theta) + \frac{b_z (1-v)}{2} \omega_\theta \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\}$$

$$r_{53} = -\lambda^2 d \frac{n}{\rho} \omega_\theta (\omega_\xi - \omega_\theta) + \frac{b_z (1-v)}{2} \frac{n}{\rho} \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\}$$

$$r_{54} = -\lambda^2 \frac{n}{\rho} \left\{ \frac{(1-v)}{2} \{d' + d\gamma [1 + \epsilon\psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)]\} + \right. \\ \left. + d\gamma [1 + C\psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)] \right\}$$

$$r_{55} = -\lambda^2 \left\{ \frac{(1-v)}{2} \{ (d' + d\gamma' + d\gamma^2 [2 + c\psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)]) \} + \right. \\ \left. + d \frac{n^2}{\rho^2} [1 + C\psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\theta)] \right\} - \frac{b_z (1-v)}{2} \{1 + \psi \omega_\theta (\omega_\theta - \omega_\xi)\}$$

$$C_1 = -q_{\xi n} + t_{T\xi n}' + (t_{T\xi n} - t_{T\xi n})$$

$$C_2 = -q_\theta - \frac{n}{\rho} t_{T\theta n}$$

$$C_3 = -q_z - (t_{T\xi n}^{\omega_\xi} + t_{T\theta n}^{\omega_\theta})$$

$$C_4 = -m_\xi + \lambda^2 [m_{T\xi n}' + \gamma (m_{T\xi n} - m_{T\theta n})]$$

$$C_5 = -m_\theta - \lambda^2 \frac{n}{\rho} m_{T\theta n}$$

$$\text{onde } ()' = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

E - ELEMENTOS DAS MATRIZES DA EQUAÇÃO DE CONTORNO

Os elementos das matrizes H, J e G da equação de contorno 2.37 são dados da seguinte forma:

$$b_1 = b \{1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$b_2 = b v \gamma$$

$$b_4 = b v \frac{n}{\rho}$$

$$b_6 = b \{\omega_\xi + v \omega_\theta + \psi \omega_\xi^2 (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$b_7 = -b \psi (\omega_\xi - \omega_\theta)$$

$$b_{12} = - \frac{b (1 - v)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$b_{13} = \frac{b (1 - v)}{2} \{1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$b_{14} = - \frac{b (1 - v)}{2} \gamma$$

$$b_{19} = - \frac{b (1 - v)}{2} \psi (\omega_\xi - \omega_\theta)$$

$$b_{22} = - \frac{b_z (1 - v)}{2} \omega_\xi \{1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$b_{25} = \frac{b_z (1 - v)}{2} \{1 + \psi \omega_\xi (\omega_\xi - \omega_\theta)\}$$

$$b_{28} = b_{25}$$

$$b_{31} = d (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})$$

$$b_{36} = d \omega_{\xi} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})$$

$$b_{37} = d \{1 - c\psi \omega_{\theta} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})\}$$

$$b_{38} = d\nu\gamma$$

$$b_{40} = d\nu \frac{n}{\rho}$$

$$b_{43} = \frac{d (1 - \nu)}{2} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})$$

$$b_{48} = - \frac{d (1 - \nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$b_{49} = \frac{d (1 - \nu)}{2} \{1 - c\psi \omega_{\xi} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi})\}$$

$$b_{50} = - \frac{d (1 - \nu)}{2} \gamma$$

$$g_1 = d_1 + \Omega_1 t_{T\xi n}$$

$$g_2 = d_2$$

$$g_3 = d_3$$

$$g_4 = d_4 + \Omega_4 m_{T\xi n}$$

$$g_5 = d_5$$

F - PROGRAMA CORTER-2

Neste apêndice apresenta-se o fluxograma do programa digital CORTER-2, desenvolvido para solucionar numericamente problemas de cascas semi-espessas de revolução.

A estrutura do programa é a mesma desenvolvida no programa CORTER-1 (ver ítem 3.1) ou [3]. A diferença apresentada pelos dois programas são devido:

- no cálculo das propriedades geométricas foi introduzida a subrotina CONSTN, pois as constantes geométricas são calculadas diferentemente daquela utilizada pelo programa CORTER-1;
- as constantes de rigidez e constantes de temperaturas são calculadas por outras expressões, devido ao modelo analítico;
- também devido ao modelo analítico, foi necessário modificar as subrotinas C1N, C2N, FA1N e FA2N.

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA CORTER-2

